RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 giugno 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sull'anidrificazione della Glicocolla* [1]. Nota del Corrispondente L. Balbiano.

In un ponderoso volume di 423 pagine [2], il prof. L. C. Maillard, prendendo le mosse da un tentativo fatto fin dal 1900 da me, in collaborazione col dott. Trasciatti [3], di preparare gliceridi di acidi amidati, descrive minutamente lo studio fatto ed i risultati ottenuti nel far reagire la glicerina coi medesimi. Egli perviene allo stesso nostro risultato, cioè non si formano in questa reazione grassi amidati, ma avviene l'anidrificazione dell'acido amidato.

Il tentativo di ottenere sostanze grasse azotate sintetiche, era evidentemente suggerito a noi da due serie di fatti.

Uno notissimo, perchè nell'idrolisi delle sostanze albuminoidi si erano da diversi sperimentatori ottenuti acidi amidati e dai medesimi, mediante i processi sintetici di Th. Curtius, di E. Fischer ed altri, si era riusciti ad ottenere i *polipeptidi*, prodotti di anidrificazione dei medesimi. L'altro, meno studiato, perchè si era accennata la presenza di idrati di carbonio nella decomposizione di alcune sostanze albuminoidi.

(1) Dal laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.

(2) *Genèse des matières protéiques et des matières humiques. Action de la glycérine et des sucres sur les acides-α-aminés.* Paris, Masson et Comp. éditeurs.

(3) B. 33, 2323, 1900 — 34, 1501, 1901 — G. 32, 410, 1902.

Che il problema prefissomi nelle mie esperienze fosse inspirato dallo stesso concetto che ha spinto il Maillard a pubblicare *dodici anni dopo*, i suoi risultati, si rileva in modo esplicito dal seguente periodo:

« Accennavo fin dalla prima Nota (1) all'importanza fisiologica di questa « sostanza (*anidride cornea della glicocolla*), perchè in tutti quei tessuti « che all'idrolisi danno glicocolla, essa può derivare dall'idratazione di questa « anidride amorfa, che nelle sue proprietà fisiche si avvicina alle materie « cornee e bruciando spande l'odore caratteristico delle medesime. Fra i pro- « dotti d'idrolisi di questi tessuti oltre alla glicocolla si trovano sempre pre- « senti altri acidi amidati e specialmente acidi amido valerianici ed amido « caproici, perciò debbo vedere se nelle condizioni di anidrificazione della « glicocolla, anche questi acidi amidati e specialmente le leucine danno tali « anidridi polimerizzate e studiarne le proprietà ».

Perciò mi sia permesso di rilevare anzitutto che se il fatto sperimentale della condensazione anidridica mediante riscaldamento con glicerina degli amido-acidi è *d'origine fortuita*, come scrive (2) il prof. Maillard, l'importanza dei risultati ottenuti per la genesi degli albuminoidi non m'era sfuggita come egli lascia supporre.

Dalle esperienze descritte allora mi risultò che la glicerina non prendeva parte alla reazione disidratante. Ora il prof. Maillard mi rimprovera di considerare la *glicérine comme un simple milieu dèshydratant banal quelconque*, pag. 20, e fa esercitare alla medesima un'azione importante, ma a mio parere completamente immaginaria, nella formazione delle diverse anidridi.

Per dimostrare la base poco solida dell'elegante edifizio costruito dal chimico francese, ho cercato di ottenere dalla glicocolla l'anidride di condensazione eliminando completamente la glicerina, ed impiegando al posto idrocarburi aromatici funzionanti solamente come moderatori di temperatura.

L'esperienza mi riuscì subito soddisfacente colla naftalina. Ho scelto questo idrocarburo, perchè il suo punto di ebollizione 218° è di pochi gradi inferiore al punto di imbrunimento 228° della glicocolla che fonde con decomposizione a 232°-236°.

Gr. 3 glicocolla finamente polverizzata si mischiarono con 10 gr. circa di naftalina, e si riscaldarono lentamente a bagno d'olio a temperatura oscillante fra 200° e 204°. Un termometro immerso nella massa reagente mi dava la temperatura della medesima, che durante l'esperienza ripeto, oscillò fra 200°-204°. Poco a poco la miscela si colora in bruno, e dopo tre ore di riscaldamento è diventata nera; nello stesso tempo si elimina acqua. Si sospende il riscaldamento e si separa, dopo raffreddamento, la naftalina con benzolo bollente, indi con alcool assoluto parimenti caldo.

(1) Pubblicata col dott. Trasciatti.

(2) Maillard, l. c., pag. 19.

Il residuo insolubile è una massa nera cristallina che, disseccata alla stufa ad acqua fino a costanza, pesa circa gr. 2,22.

La perdita di peso dei 3 gr. di glicocolla è perciò circa gr. 0,78 che corrisponde alla perdita di 1 mol. di H^2O.

$C^2H^5NO^2 - H^2O$ richiede gr. 0,72.

Questo residuo trattato con acqua si divise in due porzioni: una solubile con intensa colorazione nero-caffè; l'altra fioccosa, intensamente colorata in nero, insolubile.

Si esaurì la parte indisciolta dapprima con acqua calda, poi fredda fino a che l'acqua di lavaggio fosse quasi scolorita, e le acque riunite ed evaporate a b. m. lasciarono un residuo nero cristallino, che disseccato a 100°-110° pesa gr. 1,03; questo residuo si ridiscioglie in acqua calda e si riprecipita con alcool, ma sempre si ottiene colorato in nero.

Siccome a me interessava soltanto ricercare se in esso fosse presente della glicocolla inalterata, aggiunsi alla sua soluzione un leggiero eccesso di ossido ramico precipitato e conservato sott'acqua in pasta; feci bollire per 15 minuti, indi al filtrato bollente, sempre colorato in nero-caffè, addizionai, con precauzione, alcool 99 %; ottenni un precipitato nero che separai per filtrazione a caldo e nella soluzione di color verde-sporco, un eccesso di alcool precipitò il sale di rame azzurro della glicocolla, che ridisciolto in acqua bollente si riprecipitò con alcool. In tal modo ottenni circa gr. 0,18 di glicocolato di rame corrispondente a gr. 0,1 di glicocolla.

La parte nera fioccosa, lavata dapprima con acqua calda, poi fredda e sempre per decantazione, si disseccò alla stufa a 100°-110°, e risultò pesante gr. 1,21 circa. È sempre colorata in nero-caffè, ed è costituita quasi interamente dall'anidride cornea da me scoperta quattordici anni fa col Dr. Trasciatti. Infatti si fece digerire a *freddo* per 24 ore con 10 cm.^{3} di acido solforico al 25 %; l'acido assunse la colorazione di un infuso carico di caffè, ma la maggior parte della sostanza rimase indisciolta; solo facendo bollire a ricadere per un'ora si ebbe la soluzione completa della sostanza. Si sovrasaturò questa soluzione con un latte di calce molto fluido, indi si fece bollire per qualche tempo (15 a 20 minuti), poi il filtrato caldo, che era colorato in giallo-bruno, si sovrasaturò con anidride carbonica all'ebollizione, ed il filtrato, sempre colorato in giallo-bruno, si svaporò a secco a b. m. — Il residuo cristallino, colorato in bruno, pesava gr. 1,4. Si sciolse in acqua e si fece bollire con un leggero eccesso di ossido ramico precipitato e conservato in pasta. Il filtrato, colorato in azzurro carico, depositò col raffreddamento il sale ramico della glicocolla, che ricristallizzato dall'acqua calda, venne asciugato all'aria e disseccato sull'acido solforico.

Gr. 0,4589 perdettero a 150° gr. 0,0363 acqua e calcinati dettero gr. 0,1573 di CuO.

Trovato H^2O	7,91	Cu. 29,72
Calc. per $(C^2H^4NO^2)^2$ Cu. H^2O	7,84	» 30,03

Riscaldando quindi la glicocolla colla naftalina si produce l'anidride cornea e nelle stesse proporzioni all' incirca che se ne ottiene colla glicerina (gr. 1, 2 da 3 gr. di glicocolla), solo in questo caso rimane tenacemente aderente una piccola quantità della materia colorante nero-caffè che ne altera il colore.

Per confermare sempre più che per l'anidrificazione della glicocolla non è necessario l'intervento della glicerina, ho ripetuto l'esperienza col cimene p. b. 175°-176°.

L'andamento della reazione è sempre lo stesso, soltanto la durata della disidratazione è differente. La temperatura essendo meno elevata, la eliminazione d'acqua è più lenta e meno completa.

Gr. 1,5 glicocolla finamente polverizzata vennero riscaldati a ricadere a bagno d'olio con 10 cm.^{3} di cimene. Il termometro immerso nella massa reagente segnò durante l'esperienza 174°-175°. Dopo un'ora di riscaldamento la massa aveva assunto una debole colorazione tortora, che andò a mano a mano crescendo d'intensità. Si riscaldò per 14 ore, indi si estrasse il cimene, leggermente colorato in giallo, con benzolo e successivamente con alcool bollente, ed il residuo cristallino di color nero-caffè, con punte grigio-gialle si trattò con acqua calda, nella quale si disciolse in gran parte dando soluzione colorata intensamente come infuso di caffè carico.

Il residuo, amorfo, di color grigio-giallo, pesava circa gr. 0,14 e riscaldato a ricadere per un'ora con 5 cm.^{3} di acido solforico al 25 %, si discioglieva completamente e la soluzione, colorata in giallo-madèra, trattata con latte di calce nel modo anzidetto dà, come risultato finale, il glicocolato di rame cristallizzato, che all'analisi dette il seguente risultato.

Gr. 0,1189 sale dissec. in essiccatore ad ac. solforico, perdettero a 150° gr. 0,0095 acqua e dettero alla calcinazione gr. 0,0424 CuO.

Trovato H^2O	7,91	Cu. 30,89
Calc. per $(C^2H^4NO^2)^2$ Cu. H^2O	7,84	» 30,03

Il sale di rame non era ricristallizzato e conteneva traccie di solfato di calcio.

Fisica. — *Sulla teoria delle rotazioni ionomagnetiche.* Nota del Socio Augusto Righi (1).

1. Le rotazioni di corpi posti in un campo magnetico, girevoli intorno ad un asse diretto parallelamente al campo, le quali si producono allorchè il gas rarefatto che circonda quei corpi è opportunamente ionizzato, furono da me studiate e descritte in varie pubblicazioni (2), e anche genericamente spiegate. La spiegazione è assai ovvia.

Sotto l'azione del campo ciascun ione gassoso percorre fra un urto e l'altro, non più un segmento rettilineo, ma una curva (elica, se il campo è uniforme), di guisa che gli urti subìti dal corpo mobile divengono obbliqui in un certo senso tutt'intorno al medesimo. Di qui la rotazione osservata.

Naturalmente i ioni dei due segni determinano rotazioni di sensi opposti; per cui quanto si constata è un effetto differenziale. Nelle esperienze descritte nell'ultima delle Memorie citate l'effetto è più cospicuo, appunto perchè i ioni d'un dato segno urtano il corpo mobile in un numero assai maggiore di quello dei ioni di segno opposto.

Cercai di rendere conto con qualche dettaglio, mediante considerazioni geometriche, del meccanismo di quelle rotazioni in alcuni casi speciali, per esempio quelli di un cilindro o di un mulinello ad alette verticali; ma, specialmente in quest'ultimo caso, la spiegazione non può dirsi completa. Nel presente scritto espongo la teoria in modo abbastanza semplice, ma più comprensivo.

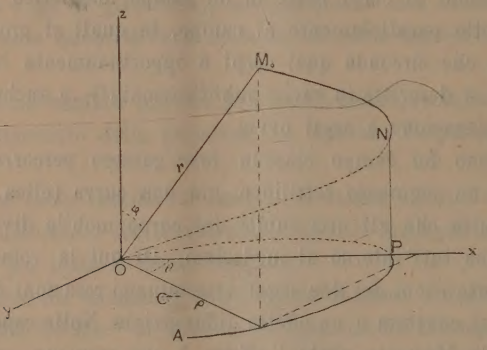
2. Naturalmente la velocità con cui un ione urta un dato elemento superficiale del corpo mobile è variabilissima sia in grandezza che in direzione, tanto col tempo quanto da luogo a luogo. Si è costretti quindi, come in ogni caso analogo, di contentarsi di calcoli approssimativi, assumendo valori medî per le quantità con cui si ha a che fare.

Ammetterò dunque, che l'ultima collisione subìta da un ione prima che esso giunga a colpire un elemento $d\sigma$ della superficie del corpo mobile, abbia avuto luogo ad una distanza r dell'elemento stesso, e che tale distanza r sia la stessa per tutti i ioni, che da qualsiasi direzione arrivano a colpire quello o qualunque altro elemento. Parimenti supporrò, che la velocità posseduta da quei ioni abbia per tutti uno stesso valore V. Supporrò infine che le molecole gassose, sulle quali i ioni urtano un'ultima volta prima d'andare

(1) Bologna, aprile 1914.

(2) Comp. Rend. 19 février 1912; Mem. della R. Acc. di Bologna, serie VI, t. IX; N. Cimento, luglio 1912; Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1 dicembre 1912; Mem. della R. Acc. di Bologna, 16 febbraio 1913; N. Cimento, luglio 1913.

a colpire l'elemento $d\sigma$, siano distribuite uniformemente sulla superficie sferica di raggio r e centro $d\sigma$. Da ogni elemento ds di tale superficie partiranno ioni in tutte le direzioni; ma fra queste si dovrà prendere in considerazione soltanto quella che permette ai ioni di colpire l'elemento $d\sigma$; il numero di ioni, che in ogni minuto secondo partono da ds e arrivano a $d\sigma$, si potrà rappresentare con $n \,.\, ds \,.\, d\sigma$.



Ciò posto, si assuma una terna di assi ortogonali, di cui quello delle z sia parallelo alla direzione del campo magnetico supposto uniforme e d'intensità H, e si rappresentino con e la carica e con m la massa di un ione (o di un elettrone). Ponendo per semplicità $k = \mathrm{H}\dfrac{e}{m}$ le equazioni del moto sono:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -k\frac{\partial y}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k\frac{\partial x}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \,.$$

Esse si integrano facilmente. Dicendo x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto M_0 da cui parte il ione nell'istante $t = 0$, ed u_0, v_0, w_0 le componenti della sua velocità V pel medesimo istante, si ha, come è facilissimo verificare:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = u_0 \cos(kt) - v_0 \operatorname{sen}(kt) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = u_0 \operatorname{sen}(kt) + v_0 \cos(kt) \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = w_0 \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} k(x - x_0) = u_0 \operatorname{sen}(kt) - v_0 [1 - \cos(kt)] \\ k(y - y_0) = u_0 [1 - \cos(kt)] + v_0 \operatorname{sen}(kt) \\ (z - z_0) = w_0 t \,. \end{cases}$$

Dalle (2) si desume, che la velocità V del ione resta invariata, e che altrettanto avviene per la sua componente perpendicolare alla direzione del campo, perchè è invariabile anche $\frac{dz}{dt}$.

3. Per raggiungere lo scopo in vista è necessario determinare le componenti secondo gli assi della velocità dei ioni, che arrivano in O, giacchè è nell'origine delle coordinate che supporremo poi collocato l'elemento $d\sigma$; e per giungere a ciò occorre anzitutto scrivere le equazioni della traiettoria.

Si ponga:

$$\alpha = \frac{kz}{2w_0} \quad , \quad \alpha_0 = -\frac{kz_0}{2w_0} . \tag{4}$$

Così facendo restano alquanto semplificate le formole che si andranno scrivendo.

Dalle (4) si deduce, in virtù della terza delle (3):

$$kt = 2(\alpha + \alpha_0) .$$

La prima e la seconda delle (3) diventano così le equazioni della traiettoria:

$$\begin{cases} k(x - x_0) = 2 \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_0)\,[u_0 \cos(\alpha + \alpha_0) - v_0 \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_0)] , \\ k(y - y_0) = 2 \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_0)\,[u_0 \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_0) + v_0 \cos(\alpha + \alpha_0)] . \end{cases} \tag{5}$$

Come è noto, e come facilmente si verifica, essa è un'elica tracciata sopra un cilindro circolare, il cui asse è parallelo ad Oz.

Fra le infinite traiettorie rappresentate dalle (5), differenti l'una dall'altra a seconda della direzione della velocità iniziale V, ve ne è una passante per O, ed è questa sola che, naturalmente, c'interessa. Per determinarla basterà trovare quei tali valori di u_0 e v_0 che rendono soddisfatte le (5) con $x = y = z = 0$, e quindi anche $\alpha = 0$.

Così facendo si trova:

$$\begin{cases} u_0 = -\,{}^1\!/_2\, k\varrho \dfrac{\cos(\alpha_0 - \theta)}{\operatorname{sen}\alpha_0} \\ v_0 = \quad {}^1\!/_2\, k\varrho \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha_0 - \theta)}{\operatorname{sen}\alpha_0} , \end{cases} \tag{6}$$

essendosi posto

$$x_0 = \varrho \cos\theta \, , \, y_0 = \varrho \operatorname{sen}\theta .$$

Quanto al valore di w_0, esso si ricaverà da $V^2 = u_0^2 + v_0^2 + w_0^2$, restandone però incerto il segno. Ma questo risulta sempre determinato dalla terza delle (3), la quale per $z = 0$ dà $z_0 + w_0 t = 0$. E poichè interessa di considerare solo epoche posteriori a $t = 0$, si vede che il segno di w_0 deve essere sempre opposto a quello di z_0. Quindi α_0 è sempre positivo.

Introducendo nelle (5) i valori (6) si avranno le equazioni della traiettoria percorsa da quello, fra i ioni che partono dal punto (x_0, y_0, z_0) con velocità V, il quale va a passare per O. Con facili trasformazioni si trova:

$$(7)\qquad \begin{cases} -x \operatorname{sen} \alpha_0 + {}^1/_2 \varrho \operatorname{sen}(\alpha_0 + \theta) = {}^1/_2 \varrho \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha_0 + \theta) \\ y \operatorname{sen} \alpha_0 + {}^1/_2 \varrho \cos(\alpha_0 + \theta) = {}^1/_2 \varrho \cos(2\alpha + \alpha_0 + \theta). \end{cases}$$

Se ne deduce, eliminando α e quindi z:

$$x^2 + y^2 = \varrho x \frac{\operatorname{sen}(\alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} - \varrho y \frac{\cos(\alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0},$$

equazione della circonferenza A P O... secondo la quale l'elica $M_0 N O$, traiettoria del ione, si proietta sul piano xy. Tale circonferenza ha per raggio $\varrho : 2 \operatorname{sen} \alpha_0$, e le coordinate del suo centro C sono

$$\varrho \operatorname{sen}(\alpha_0 + \theta) : 2 \operatorname{sen} \alpha_0 \quad , \quad -\varrho \cos(\alpha_0 + \theta) : 2 \operatorname{sen} \alpha_0 .$$

Portando ora i valori (6) nelle prime delle (2) si trova:

$$(8)\qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -{}^1/_2 k\varrho \frac{\cos(2\alpha + \alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -{}^1/_2 k\varrho \frac{\operatorname{sen}(2\alpha + \alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0}. \end{cases}$$

Avremo finalmente le componenti u, v della velocità che possiede il ione allorchè arriva in O, col porre nelle (8): $z = 0$, e quindi $\alpha = 0$. Si trova così:

$$(9)\qquad \begin{cases} u = -{}^1/_2 k\varrho \frac{\cos(\alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} \\ v = -{}^1/_2 k\varrho \frac{\operatorname{sen}(\alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0}. \end{cases}$$

4. Per valutare l'effetto complessivo prodotto da tutti i ioni che arrivano in O e provenienti dai varî punti della superficie sferica $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2$ si dovrà ricorrere ad integrazioni; ma anche prima di eseguirle le (9) possono fornire utili indicazioni.

Si supponga in O un elemento superficiale $d\sigma$ orientato perpendicolarmente alla direzione Oz del campo, e si voglia conoscere l'azione totale prodotta dai ioni, che ne colpiscono la faccia superiore. Bisognerà comporre tutte le u corrispondenti ai punti (x_0, y_0, z_0) di quella metà della sfera di raggio r e centro O, che sta al di sopra del piano xy; e poi far altrettanto per le v. È facile riconoscere che quelle due risultanti sono nulle.

Infatti, si cominci col comporre l'effetto dovuto ai ioni partenti dal punto (x_0, y_0, z_0) con quello dei ioni partenti dal punto $(-x_0, -y_0, z_0)$ simmetrico al primo rispetto all'asse Oz.

I valori di u e v per questo nuovo punto di partenza si ottengono dalle (9) cambiando θ in $\theta + \pi$, oppure in $\theta - \pi$. In ogni modo ne risultano valori eguali e di segno contrario a quelli relativi al punto (x_0, y_0, z_0). Dunque gli effetti di tutti i ioni si distruggono due a due. Ciò vale per le componenti di velocità traversali alla direzione del campo, ma non per w_0; però questa non è da tenere in considerazione se, come si suppone, $d\sigma$ appartiene ad un corpo, mobile intorno ad un asse parallelo alla direzione del campo, poichè w_0 ha rispetto a tale asse un momento nullo.

Si supponga in secondo luogo che l'elemento $d\sigma$ posto nell'origine O sia parallelo ad Oz, per esempio giaccia nel piano xz. In questo caso le velocità da comporre sono quelle possedute dai ioni partenti dai varî elementi della mezza sfera di centro O e raggio r posta da una parte del piano xz, p. es. dalla parte dell'asse Oy positivo.

In questo caso consideriamo insieme al punto (x_0, y_0, z_0) il suo simmetrico rispetto al piano xy, cioè il punto $(x_0, y_0, -z_0)$. I valori di u e v per questo ultimo punto si ricavano dalle (9) cambiando segno a z_0. Siccome però esse non contengono z_0 esplicitamente, ed α_0 (che contiene z_0) è, come si è visto nel precedente paragrafo, sempre positivo, così i valori di u e v restano invariati. Donde questa conseguenza, che nelle integrazioni basterà tener conto di una sola metà della mezza sfera sopra indicata, per esempio il quarto di superficie sferica compreso fra i piani xy ed xz, a patto naturalmente di raddoppiare il risultato.

Con un ragionameuto analogo ai precedenti si può far vedere, che se l'elemento $d\sigma$ giacente in O nel piano xz può essere percosso dai ioni su entrambe le faccie, l'effetto complessivo è nullo. Infatti si ha per risultato zero quando alle u e v dovute ai ioni partenti dai precedenti punti (x_0, y_0, z_0) e $(x_0, y_0, -z_0)$ si aggiungono quelli partenti dai punti simmetrici a questi rispetto all'asse Oz. Ne risulta che una lamina mobile non ha tendenza a spostarsi se i ioni possono liberamente giungere sulle sue due faccie.

5. L'integrazione necessaria per calcolare l'effetto risultante dei ioni partenti dalla semisfera, nel cui centro si trova l'elemento $d\sigma$ giacente nel piano xz, è facilissima per quanto riguarda le componenti u parallele all'elemento $d\sigma$, ma non certo per le v normali all'elemento stesso; fortunatamente però non occorre tener conto di queste, come si vedrà più oltre.

La risultante delle u relative ai punti di partenza (x_0, y_0, z_0) e $(x_0, y_0, -z_0)$ è, come si è detto poc'anzi, il doppio della u (9) cioè:

$$u = -k\varrho \cos(\alpha_0 + \theta) : \operatorname{sen} \alpha_0 .$$

Componiamo coll'effetto di questi due punti quello dei loro simmetrici rispetto al piano yz, cioè quello dei punti $(-x_0, y_0, z_0)$ e $(-x_0, y_0, -z_0)$. La u per questi due punti presi insieme si ricaverà dall'ultima equazione

scritta cambiando segno ad x_0, ossia cambiando θ in $\pi - \theta$, e si trova:

$$u = k\varrho \frac{\cos(\alpha_0 - \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0}.$$

Sommando questo valore col precedente si avrà la u relativa al sistema dei quattro punti, e precisamente:

$$u = \frac{k\varrho}{\operatorname{sen} \alpha_0} \Big[(\cos(\alpha_0 - \theta) - \cos(\alpha_0 + \theta) \Big],$$

od anche: $u = 2\, k\varrho \operatorname{sen} \theta$.

Con questa formola si dovrà evidentemente estendere l'integrazione soltanto all'ottavo di sfera compreso fra le direzioni positive dei tre assi, e tale integrazione riesce facilissima.

Sia ds l'elemento della sfera di raggio r e centro O che si trova in (x_0, y_0, z_0). Chiamando φ l'angolo fra Oz e la retta OM_0, che va dall'origine O al punto (x_0, y_0, z_0) sarà $\varrho = r \operatorname{sen} \varphi$, e $ds = r^2\, d\theta \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi$.

Ciò posto la quantità di moto dq parallela ad Ox recata nell'unità di tempo all'elemento $d\sigma$ dai ioni provenienti dai quattro punti considerati più sopra è:

$$dq = n\, ds\, d\sigma \,.\, u \,.\, m$$

dove il primo fattore rappresenta il numero dei ioni che vanno da ds a $d\sigma$ nell'unità di tempo. Mettendo per u, ds e ϱ i loro valori si ha:

$$dq = n\, d\sigma \,.\, r^2\, d\theta \operatorname{sen} \varphi d\varphi \,.\, 2kr \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \,.\, m$$

e quindi:

$$q = 2kmnr^3\, d\sigma \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta\, d\theta \,.$$

Integrando e ponendo:

$$A = \pi kmnr^3 = \pi He nr^3$$

si ha finalmente:

$$q = {}^1/_2\, A\, d\sigma \tag{10}$$

per la quantità di moto riferita alla unità di tempo dovuta a tutti i ioni che colpiscono una faccia di un elemento $d\sigma$ parallelo alla direzione del campo. La sua direzione è parallela all'elemento e perpendicolare al campo.

6. È ora facile il calcolare l'azione prodotta sul corpo girevole intorno ad un asse verticale, come nelle esperienze da me descritte.

Considererò come primo esempio quello d'un parallelepipedo retto girevole intorno alla congiungente dei centri delle sue due faccie orizzontali. Il campo magnetico si suppone sempre diretto verticalmente.

Siano a, b gli spigoli orizzontali, e c quello verticale. L'effetto delle componenti normali v sopra un dato elemento della superficie del corpo es-

sendo controbilanciato da quello prodotto sopra un corrispondente egual elemento della faccia opposta, basterà tener conto, come del resto si avvertì già, delle componenti orizzontali u parallele agli elementi. Ora essendo $^1/_2 A d\sigma$ la quantità di moto recata dai ioni nell'unità di tempo ad un elemento $d\sigma$, per l'intera faccia di area ac, essa sarà $^1/_2 A \,.\, ac$, ed il suo momento rispetto all'asse di rotazione sarà $^1/_2 A \,.\, ac \,.\, \frac{b}{2}$. ossia $^1/_4 A abc$. Per ciascuna delle faccie d'area bc si avrà un egual valore. Quindi per le quattro faccie laterali il momento μ della quantità di moto, che supporemo integralmente trasmessa dai ioni al corpo mobile, sarà:

$$\mu = A abc = AU$$

se con U si rappresenta il volume del parallelepipedo. Questo è l'effetto totale, perchè gli urti ricevuti dalle faccie orizzontali hanno momento nullo.

In modo analogo si tratta il caso d'un cilindro verticale mobile intorno al proprio asse.

Sia R il raggio della sua sezione ed L l'altezza. Poichè $^1/_2 A d\sigma \,.\, R$ è il momento della quantità di moto data nell'unità di tempo ad un elemento $d\sigma$, quello μ relativo all'intera superficie laterale $2\pi RL$ del cilindro sarà $\mu = A\pi R^2 L = AU$, indicando qui pure con U il volume del corpo sospeso.

Identico risultato si ottiene con corpi d'altra forma, per esempio prismi, coni, sfere, ecc.

Dalla formola

$$\mu = AU = \pi H e n r^3 U$$

si deducono queste conseguenze, e cioè che il momento μ:

1° è proporzionale all'intensità del campo magnetico;

2° è indipendente dalla grandezza della velocità V attribuita ai ioni, ciò che si comprende pensando, che aumentando V ogni ione è meno deviato dal cammino rettilineo che seguirebbe qualora non esistesse il campo, nel qual caso naturalmente non si producono rotazioni;

3° è proporzionale al volume del corpo mobile;

4° è proporzionale ad n e a r^3; ma da ciò non si possono trarre conseguenze sicure, circa l'influenza della rarefazione del gas. Infatti r cresce verosimilmente se si diminuisce la pressione del gas; ma in pari tempo cala n, perchè diminuisce il numero di molecole e quindi anche dei ioni presenti.

La formola precedente si può d'altronde generalizzare assai. Limitandoci al caso d'un corpo di rivoluzione mobile intorno al proprio asse di figura verticale Oz si immagini tracciata nel piano xz la sua curva meridiana, e sia dl un elemento di essa, di coordinate x e z. Colla rotazione intorno all'asse Oz, mentre la curva suddetta genera la superficie esposta all'urto

dei ioni, l'elemento lineare dl descrive un'area $2\pi x \,.\, dl$. Su ciascun elemento superficiale $d\sigma$ di essa gli urti dei ioni hanno per effetto di comunicare ad esso una quantità di moto $^1/_2 \,\mathrm{A} \cos\beta \,.\, d\sigma$ diretta secondo la tangente orizzontale, essendo β l'angolo compreso fra Oz e dl.

Infatti, non si deve tener conto delle componenti di velocità parallele ad Oz o che incontrano questo asse, perchè hanno momento nullo; e nella espressione della componente efficace si deve porre $\mathrm{H}\cos\beta$ al posto di H, visto che l'azione su un elemento perpendicolare al campo è nulla.

Il momento di detta quantità di moto rispetto all'asse di rotazione è $^1/_2 \,\mathrm{A} \cos\beta \,.\, d\sigma \,.\, x$, e per l'intera area generata dalla rivoluzione dell'elemento dl è $^1/_2 \,\mathrm{A} \cos\beta \,.\, 2\pi x \,.\, dl \,.\, x$, od anche $\pi \mathrm{A} x^2 dz$, perchè si ha

$$dz = dl \cos\beta .$$

Per l'intera superficie di rivoluzione il momento della quantità di moto dovuta all'urto dei ioni nell'unità di tempo sarà dunque

$$\mu = \mathrm{A} \int \pi x^2 dz ,$$

dove l'integrazione va estesa a tutta la curva meridiana. Evidentemente $\int \pi x^2 dz$ non è altro allora che il volume U del corpo mobile; dunque $\mu = \mathrm{AU}$.

Nello stesso modo che la quantità di moto comunicata nell'unità di tempo coi loro urti dalle molecole di un gas alla parete del recipiente equivale ad una forza continua, che è la pressione del gas, così il momento della quantità di moto comunicata nell'unità di tempo dai ioni al corpo girevole equivale ad una coppia agente in modo continuo. Se il corpo è sospeso ad un filo, tale coppia potrà essere equilibrata dalla elasticità di torsione, del filo stesso, ed allora l'angolo di torsione, che a quella è proporzionale, fornirà una misura relativa della detta coppia. Di qui la possibilità di verificazioni sperimentali delle conclusioni tratte dalla teoria, ed enunciate più sopra.

Nel caso degli urti delle molecole gassose si ritiene che esse rimbalzino sulla parete urtata; nel caso di ioni nulla di sicuro si può per ora asserire, ed è possibile che essi restino sul corpo girante.

7. Si può fare una obbiezione contro la legittimità del calcolo esposto alla fine del § 5, col quale si è giunti alla formola $q = {}^1/_2 \,\mathrm{A}\, d\sigma$.

Si supponga sempre l'elemento $d\sigma$ collocato in O nel piano xz, e anzi lo si consideri effettivamente come uno degli elementi di una faccia piana appartenente al corpo esposto all'urto dei ioni. Ora accade, che per certe posizioni attribuite al punto (x_0 , y_0 , z_0) sulla sfera di centro O e raggio r, la traiettoria porcorsa dai ioni partenti da quel punto prima di giungere in O incontra altrove (punto N sulla figura) il piano xz. Sembra dunque

che il risultato del calcolo del § 5 sia errato, perchè non si dovrebbe tener conto, come invece si è fatto, degli urti di quei ioni, che non raggiungono l'elemento $d\sigma$.

Se non che, se il punto N fa parte della stessa superficie piana di cui $d\sigma$ è uno degli elementi, ha luogo una compensazione pel fatto, che l'effetto prodotto dall'urto dei ioni in N equivale esattamente a quello, che i ioni stessi avrebbero prodotto arrivando sino in O.

Infatti, il punto N è caratterizzato dall'essere $y=0$ e z (e quindi anche α) differente da zero. Ora se nella seconda delle (5), dopo avervi introdotto nel posto di u_0 e v_0 i valori (6), si pone $y=0$, si trova dopo alcune opportune trasformazioni:

$$\operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}(\alpha+\alpha_0+\theta)=0$$

e poichè α non è zero: $\alpha=-\alpha_0-\theta$.

Ponendo questo valore di α nella prima delle (8) si trova per la componente secondo x della velocità con cui il ione urta il piano xz:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=-\tfrac{1}{2}\,k\varrho\,\frac{\cos(-\alpha_0-\theta)}{\operatorname{sen}\alpha_0},$$

valore identico a quello di u delle (9), che è la componente secondo x della velocità con cui il ione urterebbe il piano medesimo, se arrivasse sino ad O.

Mancherà questa curiosa compensazione solo per elementi marginali dalla faccia piana, di cui $d\sigma$ è l'elemento in O; ma l'errore rimanente sarà trascurabile, per poco che la faccia stessa abbia dimensioni grandi in paragone di r. Per una superficie curva sarà la stessa cosa, purchè il raggio di curvatura sia grande in confronto di r, ciò che praticamente può considerarsi come quasi sempre verificato.

8. L'esposta teoria mette in chiaro il meccanismo e l'essenza stessa del fenomeno delle rotazioni ionomagnetiche, e perciò con essa viene raggiunto lo scopo che mi ero prefisso; però essa presuppone condizioni di uniformità e di simmetria, che non sempre possono essere sperimentalmente realizzate.

Non lo sono, per esempio, quando la ionizzazione del gas viene prodotta mediante scariche esplosive, come nella mia prima disposizione sperimentale. Ioni ed elettroni sono allora lanciati in ogni direzione intorno alle scintille con così considerevoli velocità da dar luogo ad effetti meccanici assai notevoli, ed il corpo girante è investito dai ioni assai più dalla parte che guarda verso le scintille che dalla parte opposta.

Oltre a questa dissimetria, il fatto stesso del possedere molti dei ioni velocità assai grandi fa sì, che il loro ultimo percorso libero possa assumere valori assai più grandi di quello precedentemente ammesso come valore medio di r.

Questa circostanza si può invocare per rendere conto della mia prima esperienza di rotazione ionomagnetica, quella, cioè, della rotazione d'una specie di mulinello ad alette piane verticali.

Per spiegare tale fenomeno supposi appunto che ogni aletta riparasse in parte una delle sue vicine dal bombardamento dei ioni, con che si ammette per una porzione almeno dei ioni un non piccolo libero cammino prima del loro urto sul corpo mobile.

Per tentare qualche verificazione sperimentale dei risultati teorici enunciati nel § 6, sarebbe quindi necessario di ionizzare il gas, non col metodo tanto efficace delle scintille, ma in qualche altra maniera; gli effetti osservabili sarebbero però, così facendo, di gran lunga meno marcati.

Geologia. — *Fossili paleozoici dell'isola d'Elba.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

Nel 1892 e nel 1893 io trovavo nella parte orientale dell'isola d'Elba, alla Cala Baccetti presso il Cavo nei più alti strati di quella regione mineraria schistoso-arenacea, cioè negli schisti filladici scuri, un giacimento di fossili che, sebbene mal conservati, subito apparivano paleozoici. Li attribuivo da prima al Devoniano (1); ma un più attento esame e la successiva comparsa di numerosi lavori sui fossili del Paleozoico più recente, mi hanno persuaso che piuttosto si tratti di Carbonifero.

Alcuni fossili, come le *Myalinae*, si trovano a centinaia, uniti, da vivi, da un bisso: fra questi sono dei noduli, di rado silicizzati, il più spesso cambiati in limonite, che in origine sarà stata pirite, nei quali compaiono in variabile numero le altre specie. Sono per lo più tutte di piccole dimensioni, del tipo, si direbbe, della fauna triassica detta di San Cassiano. Fra le specie predominano quelle del genere *Schizodus*, e la fauna quasi si potrebbe dire di *Schizodus*. Fuori dei molluschi, quasi mancano altri tipi.

I fossili esaminati, come la roccia che li contiene, sono per lo più tutti screpolati e incrinati da fenditure: cioè, direbbero alcuni, *milonitizzati*; ma i singoli esemplari sono rimasti in posto. Evidentemente, durante lo spostamento e le ripiegature della roccia, risentirono notevoli pressioni.

Ecco, senz'altro, un breve accenno delle specie trovate.

Crostacei Macruri? Un esemplare in parte silicizzato ed altri frammenti, probabilmente segmenti addominali di un cefalotorace, non saprei attribuirli che ad un decapode, forse vicino ai *Palinura*. Decapodi, nel Paleozoico, non se ne trovarono mai, salvo il genere *Palaeopemphix* Gemmellaro; ma la

(1) C. De Stefani, *Gli schisti paleozoici dell'isola d'Elba* (Boll. Soc. geol. ital., vol. XIII, 1894, pag. 57).

superficie del nostro esemplare, se pure si tratti di un cefalotorace, ha parvenza assai meno complicata.

Trilobite?? Grandemente incerto è un frammento delle Ripe Bianche il quale potrebbe attribuirsi a lobi pleurali, nel numero di 7, di un pigidio; altro del Cavo, anche più incerto, potrebbe rappresentare una glabella.

Crinoidi. Numerosi articoli, alle Pietre Nere e al Cavo, talora riuniti in colonna. Si tratta di un *Actinocrinus*; come tale lo determinò anche il Meneghini sopra esemplari trovati alle Pietre Nere dal Lotti.

Echinoide-Cidaride. Una placca presenta un tubercolo primario perforato e circa 16 tubercoletti secondarî, i quali fanno pensare ai Cidaroidi. Questi vanno dal Carbonifero inferiore all'attualità.

Brachiopodi. Numerose specie ma scarsi individui pessimamente conservati: uno solo presentava la superficie intatta con appendici tubiformi, certamente un *Productidae*. Pare vi siano *Orthis*, *Strophalosia*, *Chonetes*, *Strophomena*, *Lingula*, specificamente indeterminabili; ma non aventi, in ogni modo caratteri neozoici.

Molluschi. lamellibranchiati.

Janeia 1ª sp. n. Per la forma del corsaletto, della fossa del ligamento esterno, dell'impronta muscolare anteriore, e per la struttura radiale del guscio, la attribuisco a questo genere esteso dal Devoniano al Permiano. Somiglia alla *Clinopistha parvula* De Kon. del Carbonifere Belga, se pure, come altre *Clinopistha*, è una *Janeia*; ma la nostra è assai più grande, più rettangolare, e troncata anteriormente.

Janeia 2ª sp. n. Per le striature radiali risponde bene al genere. Per la forma della parte anteriore, per la estesa lunula, si avvicina alla *J. truncata* Goldfuss del Devoniano Renano; ma ha dimensioni minori, margine palleare più ovale, umbone più acuto, carena e, rispettivamente, concavità esterne più appariscenti.

Sanguinolites sp. L'impronta muscolare anteriore e il modo di biforcazione delle carene sono come in questo genere del Carbonifero, nel quale sono confusi tipi diversissimi, anche di terreni più antichi. Il *S. Selysianus* De Kon. del Carbonifero Belga è vicino, specialmente tenendo conto che la figura accenna una seconda piccola carena non indicata nella descrizione: ma è più allungato e, nella parte posteriore, più alto.

Solenopsis sp. n. Genere esteso dal Devoniano, e forse dal Siluriano, al Carbonifero. La *S.* (*modiomorpha*) *attenuata* Whiteaves del Devoniano del Manitoba in Canadà, somiglia; ma è più grande, meno triangolare, con parte anteriore meno concava sotto gli umboni e 2 coste superficiali, invece di 3.

Cardiomorpha sp. n. Genere esteso dal Devoniano, anzi probabilmente dal Siluriano al Permiano. La *C. alata* Sandb. del Devoniano di Germania

ha carena più acuta, ma meno alta; la *C. modioliformis* King del Permiano inglese, è meno quadrata.

Cardiomorpha alia sp. La *Cardiomorpha* (?) *sp.* Girty del Carbonifero superiore dell'Idaho somiglia; ma la nostra è più rettangolaro, più troncata alle estremità, più piatta, con umboni più depressi.

Palaeoneilo cfr. *lamellosa* Beushausen. È per lo meno assai vicina a questa specie del Coblenziano inferiore di Germania, se non la diversifica la carena posteriore che mi pare più evidente. Il genere va dal Siluriano inferiore al Trias.

Palaeoneilo sp. n. Per la situazione anteriore dell'umbone somiglia alle *P.* (*Nucula*?) *inconspicua* De Kon. e *P.* (*Nucula*?) *calliculus* De Ryck. del Carbonifero Belga; ma queste, del resto di genere tuttora incerto, sono meno gonfie ed hanno il margine palleare assai convesso.

Palaeoneilo alia sp. n. La forma quasi triangolare, l'essere più inequilaterale, il margine palleare assai arrotondato, la poca appariscenza della sinuosità posteriore, il numero e la forma dei denti, distinguono abbastanza bene questa specie.

Nucula sp. n. Il genere visse dal Siluriano in poi. La *N. grandaeva* Goldf. e la *N.? erratica* Beush. del Devoniano di Germania sono meno arrotondate. L'umbone voltato all'innanzi nella nostra specie, è raro nel Paleozoico, comune nei tempi successivi. La fossetta ligamentare, situata un poco avanti all'umbone, è carattere da *Ctenodontae* paleozoiche. L'impronta muscolare accessoria fra l'apice e la parte posteriore, è carattere di *Nuculae* e *Ctenodontae* paleozoiche.

Macrodon 1ª sp. n. Comunissima. Il genere va dal Siluriano al Carbonifero. Tipi identici a quello del Paleozoico sono incerti nel Trias. La piccolezza dell'area ligamentare avvicina questa specie a quelle Devoniane.

Macrodon 2ª sp. n. Ha grandissima analogia col *M.* (*Parallelodon*) *multiliratus* Girty del Carbonifero dell'Oklahoma e dell'Arkansas, del quale però non si conosce il cardine, e che è più grande e meno allungato.

Cucullella sp. n. La forma trapezoidale, il cardine rettilineare, i denti verticali del cardine posteriore agli umboni, le impronte pediose fanno attribuire la specie a questo genere che principia nel Siluriano e finisce nel Devoniano medio. Alcune forme della *C. elliptica* Maurer del Devoniano germanico si avvicinano; ma la nostra è più rettangolare e, anteriormente, più troncata.

Conocardium sp. n. Il genere va dal Siluriano al Carbonifero. Somigliano alquanto il *C. eifeliense* Beush. del Devoniano tedesco, il *C. intermedium* de Kon. del Carbonifero inferiore Belga, il *C. uralicum* Verneuil del Carbonifero superiore dell'Urale e di Sumatra.

Myalina 1ª sp. n. Combina, per la forma, con le *M.* allungate, ornate da strie radiali comuni nel Devoniano; e per l'ornamentazione sarebbe inter-

media fra la *M. tenuistriata* Sand. e la *M. Beushauseni* Frech del Devoniano germanico. Il genere, secondo alcuni, è Siluriano e Devoniano; ma, secondo altri, è pure Carbonifero.

Myalina 2ª sp. n. È la specie più comune, essendo state unite dal bisso intere colonie di centinaia d'individui di grandi dimensioni. La fossetta apicale per il bisso ben distingue tale specie dalle *Anthracoptera* del Carbonifero. Essa ricorda la *M. bilsteinensis* F. Roemer del Devoniano di Germania, ma è molto meno rigontia. Anche la *M. subquadrata* Shumard, tanto comune nel Carbonifero superiore d'America, è vicinissima: però sembra che la parte infero-anteriore sia, in questa, più sporgente e più carenata, a conchiglia solida, quadrata, con umbone tendente all'indietro.

Schizodus 1ª sp. n. Vicino, ma diverso dallo *S.* (*Myophoria*) *truncatus* Goldf. del Devoniano renano, dallo *S.* (*Dolabra*) *equilateralis* M. Coy del Carbonifero d'Irlanda, e dal *M.* (*Protoschizodus*) *insignis* De Kon. del Carbonifero Belga. Il genere comincia nel Siluriano e, come *Miophoria*, termina nel Retico.

Schizodus 2ª sp. n. Per la sua altezza è sufficientemente distinto dalle altre specie note. È triangolare, con angolosità ventrale, umboni tendenti all'indietro.

Schizodus 3ª sp. n. Ricorda lo *S.* (*Miophoria*) *transrhenanus* Beush. lo *S.* (*Myophoria*) *Johannis* Beush. del Devoniano e lo *S.* (*Acinus*) *obscurus* Sow. del Permiano d'Inghilterra e di Germania. È rotondeggiante, poco rigonfio; umboni vòlti all'innanzi.

Schizodus 4ª sp. n. Comune: assai allungato posteriormente. Somigliano lo *S.* (*Myophoria*) *Holzapfeli* Beush. e lo *S.* (*Myophoria*) *inflatus* A. Roemer, del Devoniano, lo *S. Ferrieri* Girty e lo *S. batesvillensis* Weller del Carbonifero degli Stati Uniti d'America, lo *S. Schlotheimi* Gein. del Permiano.

Schizodus 5ª sp. n. Piccolo, trigono. Molto vicino allo *S. Roemeri* Beush. del Devoniano ed allo *S. Wortheni* De Kon. del Carbonifero.

Schizodus 6ª sp. n. Affine allo *S.* (*Myophoria*) *schuelmensis* Beush. del Devoniano Renano. È quasi ovale, rigonfio; umboni vôlti all'innanzi.

Schizodus 7ª sp. n. Molto analogo, però diverso, dallo *S. obscurus* Sowerby del Permiano d'Inghilterra. Molto allungato trasversalmente, con due sottili creste posteriori.

Schizodus 8ª sp. n. Quasi tetragono: umboni volti all'innanzi. Assai più breve dello *S. Holzapfeli* Beush. del Devoniano.

Schizodus 9ª sp. n. Liscio, umboni appena voltati indietro con 2 carene posteriori. È un tipo più vicino a quelli del Trias (*Myophoriae*) che non a quelli del Paleozoico.

Schizodus 10ª sp. n. Ovato, posteriormente cuneiforme, quasi triangolare, con due o tre distinte pieghe anteriori. Lo *S. obscurus* Sow. del Permiano somiglia alquanto; ma più ricorda le vere *Trigoniidae* del Secondario.

Schizodus (*Myophoria*)? sp. n.? Frammento anteriore di valva sinistra con 7 od 8 coste radianti. Somiglia notevolmente alla *Buchiola imbricata* Beush. del Devoniano, ma pure a certe *Myophoriae* triassiche, p. es. alla *M. ornata* Münster del Trias alpino; e ritengo che preferibilmente debba avvicinarsi a questo tipo.

Modiola sp. Il genere rimonta al Devoniano. La *M. reniformis* De Kon. del Carbonifero Belga è più lunga, più alta anteriormente.

Goniophora sp. Il genere va dal Siluriano al Carbonifero. La *G. Schwerdi* Beush. del Devoniano è meno quadrata e con la carena non rettilineare rispetto alla nostra.

Allorisma cfr. *corbuloides* Beushausen. Il genere va dal Devoniano al Permiano; la specie sarebbe del Devoniano di Germania. Dubitavo si trattasse di una *Leda*; bensì in tutti i cardini delle *Nuculidae* fossili si vedono così bene i dentini che quasi non si può sbagliare: e qui mancano. Vero è che la specie del Devoniano ha una lunula poco marcata; ma l'esemplare tipico ha il guscio, mentre il nostro è un nucleo.

Lucina sp. Attribuiscono le forme paleozoiche al genere *Paracyclas* che parmi assolutamente sinonimo. Per lo meno nella forma e nel margine palleare integro la nostra specie somiglia alla *L.* (*Paracyclas*) *dubia* Beush. del Devoniano Renano,

Scafopodi.

Plagioglypta c/r. cyrtoceratoides De Kon. Comune. Il genere va dal Carbonifero al Trias. La specie citata fu descritta come *Entalis* dal Carbonifero Belga.

Gasteropodi.

Lepetopsis sp. n. La *L.* (*Umbrella*) *laevigata* M. Coy del Carbonifero d'Irlanda è più regolare, con apice più eccentrico senza tendenza di curvatura all'innanzi. Il genere va dal Siluriano al Carbonifero, forse al Permiano.

Bellerophon antracophilus Frech. La specie fu trovata nel Carbonifero dell'Ungheria e della Slesia. Il genere va dal Siluriano al Permiano.

Euphemus sp. n. È vicino al *E. Urei* Flem. comunissimo nel Carbonifero; ma le costole longitudinali vi sono circa 16, invece che 25 a 30. Il genere va dal Devoniano al Permiano.

Murchisonia 1ª sp. n. Somiglia alle forme Devoniane e Carbonifere indicate col nome, un po' vago, di *M. angulata* Phillips; ma ad ogni modo si distingue dal tipo. Il genere comune nel Devoniano è raro e finisce nel Trias.

Murchisonia 2ª sp. n. Si può ravvicinare alla *M. tricincta* Münster del Devoniano inglese.

Murchisonia 3ª sp. n. A prima giunta si prenderebbe per un *Polyphemopsis*: ma la presenza di 7 od 8 costoline trasversali la allontana.

Rispetto alla *M. acuta* De Kon. del Carbonifero Belga la nostra specie ha spira assai più breve, ultimo giro assai più grande.

Ivania sp. n. Per tracce di nodosità longitudinali si distingue dalle altre specie note. *Ivania* o *Baylea* è un sottogenere delle *Murchisonia* che si trova nel Devoniano e nel Carbonifero.

Naticopsis sp. n. Comunissima e talora ben conservata. L'ingrossamento calloso sulla columella distingue il genere, esteso dal Devoniano al Trias, dai generi *Strophostylus*, *Diaphorostoma*, *Turbonitella*.

Macrochilina 1ª sp. n. Vicina alle *M. maculata* De Kon., *conspicua* De Kon. e *tumida* De Kon. del Carbonifero Belga. Il genere durò dal Devoniano al Permiano.

Macrochilina? sp. n. La *M.* (*Macrocheilus*) *Barroisii* Gemmellaro, dal Permiano di Sicilia ha l'ultimo giro più gonfio e la spira più ottusa.

Loxonema sp. n. Il genere va dal Siluriano al Trias; ma forme assai affini seguitano in terreni più recenti. Sono vicini il *L. Roemeri* Kayser del Devoniano dell'Harz, il *L. strigilatum* De Kon. del Carbonifero Belga, e il *L.* (*Turbonilla*) *Montis Crucis* Stache del Permiano Tirolese.

Holopella? sp. Forma incerta, vicina alla *H. varicosa* Holzapfel del Devoniano; però, senza varici.

Turbonitella sp. n. È meno gonfia e meno ottusa della *T. subcostata* Goldfuss del Devoniano Renano. Il genere è Devoniano e Carbonifero.

Cefalopode.

Un unico frammento, con lobatura semplicissima, ha l'apparenza di un Nautiloide.

La Fauna è ben poco suscettibile di paragone con altre già note, e piuttosto che alle singole specie, bisogna guardare al loro insieme. Alcune specie si potrebbero avvicinare ad altre Devoniane, come la *Palaeoneilo* cfr. *lamellosa*, la *Allorisma*. Qualche *Schizodus* e la abbondante *Myalina* potrebbero unirsi a forme Devoniane e Carbonifere; la sola *Modiola* risponde ad una incerta specie del calcare a *Bellerophon* Permiano del Tirolo; il solo *Bellerophon anthracophilus*, e forse la *Plagioglypta*, rappresentano specie note del Carbonifero.

Fra i numerosi *Schizodus* sono alcuni tipi simili a quelli del Trias, ed uno perfino alle *Trigoniae* più recenti. Alcuni generi (*Ctenodonta*, *Plagioglypta*, *Murchisonia*, *Naticopsis*, *Loxonema*) si estendono dal Paleozoico al Trias, e gli *Schizodus* o *Myophoria* fino al Retico; altri (*Nucula*, *Modiola*, *Lucina*) dal Paleozoico arrivano fino ad oggi. Parecchi altri generi invece non giungono al Trias. Alcuni cessano nel Permiano (*Janeia*, *Cardiomorpha*, *Allorisma*, *Bellerophon*, *Euphemus*, *Macrochilina*); altri nel Carbonifero (*Solenopsis*, *Macrodon*, *Conocardium*, *Myalina*, *Goniophora*, *Lepetopsis*, *Ivania*, *Turbonitella*). Nel Devoniano, mancando nel Siluriano, prin-

cipiano i generi *Janeia*, *Solenopsis*, *Modiola*, *Allorisma*, *Euphemus*, *Murchisonia*, *Ivania*, *Naticopsis*, *Macrochilina*, *Turbonitella*. Il solo gen. *Cucullella* è, per ora, proprio del Devoniano; il solo *Sanguinolites*, del resto incerto, è Carbonifero. Per queste circostanze si potrebbe essere incerti fra Devoniano e Carbonifero. I Brachioppodi, pessimamente conservati, escludono il Secondario. La mancanza di specie di Brachiopodi ben conservati, di buoni Trilobiti e di Corallarii, non permette una esatta determinazione, e lascia incerti pure sull'appartenenza ad uno o ad altro piano del Carbonifero. Pei rapporti con specie Devoniane, non si può escludere che si tratti di Carbonifero inferiore; mentre certi rari rapporti con forme secondarie avvicinerebbero i fossili al Permiano. Probabilmente si tratta di Carbonifero medio o superiore. Di fronte alla medesima incertezza si trovarono autori che trattarono di altre faune carbonifere d'Europa.

Nelle vicinanze del Cavo furono già da tempo trovati dei fossili. Presso Vigneria il Lotti trovò esemplari mal conservati che Meneghini attribuì a *Orthoceras sp.*, *Cardiola* cfr. *Bohemica* Barr.. *Actinocrinus sp.* la stessa trovata al Cavo, *Monograptus sp.*, quest'ultimo del M. Arco. Il Meneghini stesso ritenne questi fossili Siluriani. Tra Capo Pero e la Cala del Telegrafo il Fossen raccolse alcuni Crinoidi, che il Meneghini dubbiosamente riportò al Carbonifero [1]. De Angelis, in seguito, trovò nella stessa regione, a Vigneria presso Rio Marina, una impronta di pianta che attribuì ad *Asterophillites*, genere Paleozoico che principia nel Devoniano e ritenne che quei terreni dovessero attribuirsi piuttosto al Carbonifero che non al Siluriano, come prima si credeva [2].

Finalmente il Sacco, dal Malpasso a Ripabianca, trovò una *Fenestella*, giudicata dal Gortani vicina alla *F. Veneris* Fischer del Carbonifero [3]. È molto probabile che questi fossili, ed i terreni che li racchiudono, appartengano tutti alla medesima età di quelli da me descritti.

Il Lotti distinse nella regione orientale dell'Elba, cominciando dal basso: 1°) Schisti carboniosi Siluriani; 2°) schisti micaceo-arenacei, dubbiosamente *carboniferi*; 3°) arenarie, puddinghe *permiane*. Già sostenni che tale distinzione litologica non regge, essendo i detti strati replicatamente alternanti; e di questo parere sono pure il De Angelis ed il Sacco. Dovrebbesi ora ritenere che neppur paleontologicamente si possano scindere e che appartengano tutti al Carbonifero. Con altri terreni carboniferi d'Italia è difficile il paragone. Nel monte Pisano trovansi dei molluschi entro rocce sottostanti al Carbonifero superiore, che il Fucini attribuisce alla Creta.

(1) B. Lotti, *Descrizione geologica dell'isola d'Elba*. Roma 1896, pp. 31 e 35.

(2) G. De Angelis, *Sopra il primo fossile vegetale trovato negli schisti carboniosi paleozoici dell'Elba orientale* (Boll. Soc. geol. ital., vol. XIII, 1894, pag. 176).

(3) F. Sacco, *Rinvenimenti di fenestelle all'Elba* (Boll. Soc. geol. ital., vol. XXXII, 1913, pag. 439).

Gli strati più alti, a piante, non contengono fossili marini: nè si conoscono nel Westfaliano delle Alpi occidentali, o nel Carbonifero superiore di Sardegna. Ve ne sono negli strati di Jano; per un supposto *Productus horridus*, che poi si trovò inesattamente determinato, questi furono creduti da alcuno Permiani: ma in realtà appartengono al Carbonifero superiore Stefaniano. Però di quei molluschi non fu mai pubblicata l'illustrazione. Pure difficile è il paragone col Carbonifero e col Permiano delle Alpi Carniche, coi quali non è ben nota, per ora, comunanza di specie.

Meccanica. — *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili.* Nota del dott. ing. G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Nel 1884, Gyldén pubblicava (1) una Nota *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili*, riducendolo ad equazioni che egli chiama funzionali e che in realtà non sono altro che equazioni integro-differenziali. Le coordinate incognite ξ ed η vengono infatti date dal sistema

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi \dfrac{d\psi}{d\tau} - \psi \dfrac{d\xi}{d\tau} = h_1 + \displaystyle\int \xi \frac{F}{\varrho^3}\, d\tau \\ \eta \dfrac{d\psi}{d\tau} - \psi \dfrac{d\eta}{d\tau} = h_2 + \displaystyle\int \eta \frac{F}{\varrho^3}\, d\tau \,. \end{cases}$$

Questa via abbandonata dai matematici come un'inutile complicazione viene ora ripresa dal Tommasetti e dallo Zarlatti (2). Non sembra però che il metodo delle equazioni integro-differenziali dia nuovi risultati; ed infatti le quattro proprietà della traiettoria che i due autori dimostrano ed indicano con le lettere $\alpha)$ $\beta)$ $\gamma)$ $\delta)$, e l'equazione in coordinate polari a cui arrivano erano già state precedentemente pubblicate da me (3) in due Note apparse su questi Rendiconti. Poichè gli autori non fanno mai il mio nome, io domando all'Accademia il permesso di stabilire la mia priorità, tanto più che è necessario di rettificare alcuni errori in cui essi sono caduti.

2. Il Tommasetti e lo Zarlatti dànno grande importanza al caso di masse sempre decrescenti, per lo studio delle orbite cometarie. Essi scrivono infatti (Bulletin, pp. 156-157).

« Ainsi p. ex. considérons une comète periodique; si nous supposons, « comme l'observation l'a confirmé en quelque cas, que dans le voisinage « du périhélie, à cause des actions solaires, quelque soit leur nature, se

(1) *Die bahnbewegungen in einem Systeme* ecc.. Astron. Nach., 2593.

(2) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (séance du 13 octobre 1913); e: Bulletin de l'Observatoire de Paris (avril 1914).

(3) Questi Rendiconti, sedute del 17 dicembre 1911 e del 2 marzo 1913.

« produit une dissipation de matière, le noyau de la comète après le passage « au périhélie décrira une trajectoire dont tous les éléments sont grandis (?) « Nos resultats confirment l'idée de quelques astronomes que toutes les « comètes quasi paraboliques on hyperboliques ont été elliptiques ».

Cominciamo ad osservare che il piano dell'orbita resta matematicamente invariabile, qualunque sia la diminuzione o l'aumento di massa; è erroneo quindi scrivere che *tutti* gli elementi sono « grandis », giacchè l'inclinazione e la longitudine del nodo rimangono invariabili. Occorre anche ricordare che l'orbita relativa di una cometa, non dipende nè dalla propria massa μ, nè da quella del sole M, ma soltanto dalla somma $M + \mu$. Ora μ è sempre così piccolo rispetto ad M, che noi possiamo asserire *che la traiettoria di una cometa è fisicamente indipendente dalla propria massa.* Ciò è tanto vero che noi calcoliamo *con la più grande esattezza* l'orbita e le perturbazioni di una cometa, *senza conoscerne la massa.* Anche se la massa di una cometa si riducesse, supponiamo pure, alla sua centesima parte, l'orbita resterebbe identica dentro al limite degli errori dell'osservazione. Ma vi è di più.

L'aumento secolare della massa solare M, per quanto piccolo, è certamente superiore all'ipotetica diminuzione di cui è suscettibile la massa di una cometa. Qualunque sia quindi la cometa che noi studiamo, la quantità $M + \mu$ è una funzione crescente del tempo. Perciò da questo lato, se non sussistono altre cause di perturbazione, non solo non è vero che l'orbita da ellisse si cangi in parabola, come scrivono il Tommasetti e lo Zarlatti, ma in qualche caso può avvenire esattamente il contrario.

3. Osservo ancora che, dal lato analitico, il problema dei due corpi con masse sempre decrescenti, si riconduce facilmente al caso di masse sempre crescenti. Sia infatti $F(t)$ una funzione *decrescente* dell'argomento t; la soluzione e lo studio del problema dipendono dall'equazione:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - K\frac{F(t)}{r^2}. \tag{2}$$

Facciamo nella (2) $t = -\tau$ e poniamo $F(t) = \psi(\tau)$: avremo essendo $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{[d(-t)]^2}$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{c^2}{r^3} - K\frac{\psi(\tau)}{r^2}. \tag{3}$$

Ora nella (3) $\psi(\tau)$ è una funzione *crescente* di τ, se quindi immaginiamo studiato il movimento definito dalla (3), potremo anche considerare come studiato il movimento definito dalla (2).

4. Il Tommasetti e lo Zarlatti dànno nella loro Nota tre leggi del movimento che indicano con le lettere $\alpha)$ $\beta)$ $\gamma)$ e, nel Bollettino ne aggiun-

gono una quarta che indicano con la lettera δ). Scrivo in colonna le une accanto le altre le leggi del Tommasetti e dello Zarlatti e le mie. Bene inteso, tolgo le parole tra parentesi che si riferiscono alle masse decrescenti, e che, per quanto ho detto, non ci dànno nulla di nuovo.

ARMELLINI.

Legge VII. « Se in un istante qualsiasi t_1 la conica osculatrice alla traiettoria è un'ellisse o una parabola, in tutti gl'istanti successivi la conica osculatrice sarà certamente ellittica ».

(Nota II, pag. 298).

Teor. II. « [Se $M(t)$ diviene ∞ per $t=\infty$] e se r ammette un limite superiore L, allora crescendo il tempo, r diviene minore di ogni quantità assegnata ».

(Nota I, pag. 683).

Legge VI. « Se in un istante qualsiasi la differenza tra la semiforza viva e la funzione delle forze per il punto B è nulla o negativa, allora [se $M(t)$ diviene ∞ per $t=\infty$] crescendo il tempo r diviene minore di ogni quantità assegnata ».

(Nota II, pag. 296).

« Affinchè l'urto dei due corpi (in senso fisico, cioè affinchè r divenga $<\varepsilon$) avvenga certamente, *qualunque siano le condizioni iniziali del moto*, non basta che $M(t)$ divenga ∞ per $t=\infty$; ma occorre che essa lo divenga di ordine non inferiore al primo. Per es. se la massa solare crescesse secondo la legge $a+b\sqrt{t}$, *alcune comete iperboliche potrebbero sfuggire alla sua attrazione* ».

(Nota II, pag. 299).

TOMMASETTI e ZARLATTI.

α) « Pour $F(t)$ croissant, si à un instant t_1 la conique osculatrice est une ellipse ou parabole, en tous les instants successifs elle sera toujours elliptique ».

(Bulletin, page 156, et C. R.).

β) « Si $F(t)$ pour $t=\infty$ tend vers ∞, et si r admet une limite supérieure R, on a $\lim_{t=\infty} r = 0$ ».

(Bulletin, page 157, et C. R.).

γ) Si à un instant donné la conique osculatrice est une parabole ou ellipse et $\lim_{t=\infty} F(t) = \infty$ il en resulte $\lim_{t=\infty} r = 0$.

(Bulletin, page 159, et C. R.).

δ) « Pour toute loi $F(t)$ telle que $\lim_{t=\infty} F(t) = \lim_{t=\infty} (A)t^n$ où $0<n<1$, *quelque comète hyperbolique pourrait échapper à l'attraction du soleil* ».

(Bulletin, page 159).

« Si $\lim_{t=\infty} F(t) = \lim_{t=\infty} |A| t^n$ ou $n>1$, on a le choc ».

(Id., page 158).

5. Come il lettore vede i risultati sono identici. Dobbiamo però osservare che è erroneo asserire come fanno il Tommasetti e lo Zarlatti, nelle proprietà β) e γ) che $\lim_{t=\infty} r = 0$; noi sappiamo solo, come io pubblico, che r diviene inferiore ad ogni quantità assegnata: cioè che è sempre possibile trovare un istante t_1 tale che in esso sia $r < \varepsilon$; o, in altre parole, che esso ha per limite *inferiore* lo zero.

Ed è facile anzi di costruire degli esempî in cui, benchè r rimanga sempre minore di L, *e benchè* M(t) *cresca all'infinito, pure r non tende ad alcun limite.* Il più semplice è di supporre che la massa solare aumenti bruscamente tutte le volte che la terra è al suo afelio.

L'orbita terrestre risulta allora composta di una successione di ellissi, la cui distanza perieliaca va sempre decrescendo, mentre la distanza afeliaca resta costante. Se la massa solare crescesse in tal modo all'infinito, il raggio vettore r diverrebbe, ad ogni rivoluzione, inferiore ad ogni quantità assegnata, perchè la distanza perieliaca andrebbe a zero; ma nello stesso tempo la r non tenderebbe ad alcun limite, perchè ad ogni rivoluzione la terra riprenderebbe l'antica distanza afeliaca.

L'errore nei risultati proviene dalla mancanza di rigore nelle dimostrazioni, dove il Tommasetti e lo Zarlatti applicano spesso con poca cautela l'operazione del passaggio al limite; *spesso senza domandarsi nemmeno se questo limite esiste.*

Per es., volendo dimostrare il teorema β) gli autori dicono: « Pour démontrer la première partie de ce théorème remarquons qu'à l'instant $t = \infty$ le corps m decrira l'orbite osculatrice limite ». Sarà bene osservare che in molti casi l'orbita osculatrice limite per $t = \infty$ *non esiste.* Essa esiste soltanto quando gli elementi osculatori per $t = \infty$ tendono verso limiti ben determinati, e ciò non sempre avviene. La dimostrazione non è quindi soddisfacente.

Veniamo al teorema γ). Gli autori scrivono che se $e(t_1) < 1$ si ha $e(t) < 1$ *e ciò è perfettamente vero.* Essi ne deducono $\lim_{t=\infty} e(t) < 1$; *e ciò non è esatto.* Possiamo vederlo subito tornando a studiare l'orbita terrestre nel caso in cui la massa solare aumenti bruscamente tutte le volte che la terra è al suo afelio. Il valore attuale dell'eccentricità $e(t_1)$ è minore di 1; $e(t)$ resta ancora sempre minore dell'unità; eppure il limite per $t = \infty$ di $e(t)$ è *precisamente eguale ad 1.* Infatti la distanza perieliaca tende a zero; mentre quell'afeliaca resta costante. La quantità $\frac{c^2/\mathrm{F}(t)}{1 - e(t)}$ potrebbe quindi avere un limite diverso da zero, annullandosi nello stesso tempo il numeratore e il denominatore; tutta la dimostrazione è perciò priva di valore.

6. Per giungere all'equazione della traiettoria io comincio dall'esprimere la somma delle masse M(t) in funzione (approssimata) dell'anomalia vera ϑ. Giungo in tal modo all'equazione (Nota II, pag. 301)

$$(4)\quad r = \frac{c^2/K}{m + \left[G_1 + \int_0^{\vartheta} \lambda(\vartheta) \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta\right] \cos \vartheta - \left[G_2 + \int_0^{\vartheta} \lambda(\vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta\right] \operatorname{sen} \vartheta}.$$

Il Tommasetti e lo Zarlatti (Comptes Rendus; Bulletin, page 165) partono dall'integrale delle aree

$$(5)\quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c,$$

da cui ricavano (supponendo $t = 0$ per $\vartheta = 0$)

$$(6)\quad t = \frac{1}{c} \int_0^{\vartheta} r^2 \, d\vartheta;$$

eseguiscono la quadratura (6) col teorema della media, e ottengono:

$$(7)\quad t = \alpha\vartheta.$$

Il Tommasetti e lo Zarlatti cadono anche qui in errore scrivendo, tanto nel Bollettino che nei Comptes Rendus, che α è una *costante incognita. Se α fosse costante, dalla* (7) *l'anomalia vera ϑ sarebbe proporzionale al tempo t, e l'orbita risulterebbe circolare.*

L'errore proviene dal fatto che i due autori non hanno posto attenzione al limite superiore dell'integrale (6) che è variabile. In ogni modo giunti a questa, sia pure erronea, conclusione, il Tommasetti e lo Zarlatti non dovevano far altro che sostituire di nuovo il valore di ϑ dato dalla (7) nella (5). Avrebbero immediatamente trovato come equazione della traiettoria un cerchio di raggio $r = \sqrt{c\alpha}$.

Invece essi hanno amato di seguire la strada già da me battuta esprimendo, anche loro, le masse in funzione dell'anomalia vera ϑ. Pongono dunque $\mu(t) = \mu(\alpha\vartheta)$ e ottengono, *trattando α come una costante*,

$$\frac{d^2 \frac{1}{2}}{d\xi^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{r} = \frac{F(\xi)}{\alpha^2 c^2} \qquad (\alpha\vartheta = \xi)$$

equazione che naturalmente è erronea; da essa infine ricavano:

$$(8)\quad r = \frac{1}{\left\{A_1 - \frac{1}{\alpha c^2} \int_0^{\vartheta} \mu(\alpha\vartheta) \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta\right\} \cos \vartheta + \left\{B_2 + \frac{1}{\alpha c^2} \int_0^{\vartheta} \mu(\alpha\vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta\right\} \operatorname{sen} \vartheta}.$$

Formalmente anche la (8) è errata, giacchè α essendo funzione di ϑ, non può essere portata al di fuori del segno d'integrazione. *Ma soprattutto occorre osservare che, poichè α è una funzione incognita, il problema deve considerarsi come non risoluto.*

Possiamo però determinare α con una certa approssimazione ponendo, p. es., $\mu(t) = m + \lambda(\vartheta)$; dove $m = \mu(0)$ e $\lambda(\vartheta)$ è una funzione che nei casi pratici assume valori assai piccoli di fronte ad m, e può essere approssimativamente determinata nel modo che io spiego nella mia seconda Nota. Ma allora si torna alla (4) ed in tale ordine d'idee è a me che spetta la priorità.

Il Tommasetti e lo Zarlatti hanno tratto dalla (8) parecchie conclusioni nella forma della traiettoria, sempre supponendo α costante. *Inutile dire che tutte queste conclusioni vengono rese prive di valore, dal fatto che α è invece una funzione incognita di ϑ.*

7. Domando ora il permesso di riprodurre una parte di una comunicazione a me diretta dallo Zarlatti, anche a nome del Tommasetti, in cui essi credono di trovare alcuni errori nella mia opera. Poichè in realtà questi errori non sussistono, credo utile di occuparmi della questione con lo scopo precipuo di evitare, un'eventuale inutile polemica.

Dice dunque lo Zarlatti:

« . . . . . ed è per questa semplice ragione che non abbiamo creduto opportuno di citarle (le mie Note), perchè avremmo dovuto mettere in rilievo degli errori (???) ecc. ecc.

« Secondo le sue Note dei Lincei, p. es. *tutte* (???) le comete iperboliche nell'ipotesi di masse crescenti, per leggi $F(t)$ tali che $\lim_{t=\infty} F(t) = \lim_{t=\infty} At^n$ ove $n < 1$, *avrebbero dovuto* al limite allontanarsi indefinitamente dal sole (??), il che è falso.

« Inoltre, si rammenti che, nel *caso generale*, le variazioni dell'eccentricità sono dello stesso ordine di quelle del parametro (C. R., e Bulletin) (1) quindi (??)„ la formola che lei scrive

$$r = \frac{p/1 + \varepsilon t}{1 + e_0 \cos \vartheta} \tag{9}$$

è falsa (???) ».

Evidentemente il Tommasetti e lo Zarlatti hanno letto con troppa fretta i miei lavori, *altrimenti si guarderebbero dal trovare erronee delle proposizioni, che io non ho mai nè pubblicato, nè scritto, nè pensato.*

Io ho detto: « Affinchè l'urto dei due corpi avvenga certamente, qua« lunque siano le condizioni iniziali del moto, non basta che $M(t)$ divenga « ∞ per $t = \infty$, ma occorre che lo divenga di ordine non inferiore al primo. « Per es. se la massa del sole crescesse secondo la legge $a + b\sqrt{t}$, *alcune*

(1) Mi sia permesso di osservare che assai prima del Tommasetti e dello Zarlatti, questa verità era stata dimostrata dallo Strömgren (Astr. Nachr., 3897); il quale non solo ha fatto vedere che tutte queste perturbazioni sono dello stesso ordine di grandezza, ma ha dato anche formole comodissime per calcolarle.

« comete iperboliche *potrebbero* sfuggire alla sua attrazione ed allontanar-
« sene indefinitamente » (Nota II, pag. 299). *E questo è verissimo.*

Ho scritto dunque « *alcune comete iperboliche potrebbero* » e non già « *tutte le comete iperboliche dovrebbero* ». Prego caldamente il lettore di verificare la dicitura, per accertarsi egli stesso, con i propri occhi, dell'esattezza di quanto scrivo.

Del resto, il teorema fondamentale nell'urto, è stato trovato da me (Nota I); ed io non credo di essere illogico a tal punto da dare esempi contrarii ad una proposizione, che io stesso ho scoperto e dimostrato per primo.

La seconda osservazione dello Zarlatti non è meno stupefacente.

Siamo perfettamente d'accordo che *nel caso generale*, le perturbazioni dell'eccentricità e del parametro sono dello stesso ordine di grandezza. Ma io ho detto (*e l'ho stampato anche in corsivo perchè non sfugga all'attenzione del lettore*) che la (9) è valida quando la quantità di materia cosmica che cade sul sole, si supponga costante, cioè nel *caso in cui la massa sia funzione lineare del tempo*. Non comprendo però, perchè il Tomasetti e lo Zarlatti attribuiscono a me la (9). Ogni studioso di meccanica celeste sa benissimo che questa formola, che non solo non è errata, ma costituisce uno dei più eleganti risultati ottenuti in questa teoria, è dovuta al Lehmann; ed io ho detto chiaramente nella mia Nota che io non ho in questo altro merito che di esservi arrivato in due righe, partendo dalla (4), mentre il Lehmann v'impiega qualche pagina di calcolo. Non solo, ma ho anche citato scrupolosamente la rivista e il fascicolo in cui il Lehmann la pubblicò.

3. Termino questa Nota con una breve osservazione. Alla pag. 160 del Bollettino i due autori arrivano alla seguente conclusione: « Pour $F(t)$
« *croissant*, l'excentricité des coniques osculatrices est la somme d'une
« fonction *décroissante* du temps et d'un terme *oscillant* ». È facile verificare l'inesattezza di questa conclusione ricorrendo al solito esempio dell'orbita terrestre, nel caso in cui la massa solare aumenti tutte le volte che la terra è all'afelio. Qui l'eccentricità va *crescendo e non presenta alcuna oscillazione.*

Inutile avvertire il lettore che io ho fatto costantemente uso di questo esempio, solo perchè è estremamente semplice: ma che se ne potrebbero trovare molti altri; anche imponendo ad $F(t)$ la condizione di essere continua, derivabile ecc.

Meccanica. — *Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'Idrodinamica* (1). Nota del prof. T. Boggio, presentata dal Corrisp. E. Almansi.

1..... La formula (3) della Sua Nota, testè pubblicata nei Rendiconti di questa Accademia: *Sopra le azioni le quali si esercitano fra corpi che si muovono o si deformano entro una massa liquida*, dalla quale Ella ha dedotto così eleganti applicazioni ai corpi pulsanti, mi pare possa dedursi immediatamente dal teorema di Herz, sulla variazione del flusso.

Ecco in qual modo:

Sia $\mathbf{u}(P, t)$ un vettore funzione regolare di P e di t, cioè funzione finita e continua, colle derivate prime, del punto P e del tempo t; tale vettore sia definito in una regione S dello spazio, la quale supponiamo fissa o variabile col tempo.

Sia poi σ una superficie chiusa, contenuta in S, superficie che potrà comunque muoversi o deformarsi col tempo; e indichiamo con $\mathbf{v}$ la velocità del suo punto generico P all'istante t.

Il teorema di Herz sulla variazione del flusso, è allora espresso dalla formula (2):

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{u}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\mathbf{n}\times\mathbf{u})}{\partial t}\, d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\, d\sigma\,,$$

ove $\mathbf{n}$ è un vettore unitario, normale alla superficie σ.

Ciò premesso, poniamo

$$\mathbf{u} = \varphi\mathbf{a}\,,$$

ove $\mathbf{a}$ è un vettore costante, e φ è un numero funzione regolare di P e di t; ricordando che (3)

$$\mathrm{div}\,(\varphi\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\,\varphi\times\mathbf{a}\,,$$

la (1) porge:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\times\mathbf{a}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\varphi\mathbf{n}\times\mathbf{a})}{\partial t}\, d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\varphi\times\mathbf{a}\, d\sigma\,.$$

(1) Estratto di lettera del prof. T. Boggio al prof. E. Almansi.

(2) Cfr. Burali-Forti et Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique, et à la physique mathématique*, pag. 116, form. (12) (Paris, Hermann, a. 1910).

(3) Cfr. i citati *Éléments*, pag. 73, form. (4).

Ora, supponendo il vettore $\mathbf{a}$ unitario, e parallelo all'asse Ox, la quantità $\mathbf{n}\times\mathbf{a}$ vale il coseno dell'angolo che la normale forma coll'asse Ox, ed $\mathbf{n}\times\mathbf{v}$ è la proiezione (con segno), sulla normale, della velocità del punto P, mentre $\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{a}$ vale la derivata parziale di φ rispetto ad x; la formula precedente coincide quindi colla Sua formula (3).

Ritenendo poi, nella formula precedente, $\mathbf{a}$ vettore costante arbitrario, esso può essere portato fuori degli integrali, e quindi, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, si conclude:

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\varphi\mathbf{n})}{\partial t}\,d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,\operatorname{grad}\varphi\,d\sigma\,.$$

La (1) può considerarsi come una formula fondamentale, come lo è il teorema della divergenza, da cui essa è stata dedotta; da tale formula se ne possono dedurre moltissime altre, procedendo nell'identico modo con cui nell'opera: Burali-Forti et Marcolongo, *Transformations linéaires* (1) (Pavia, Mattei e C., a. 1912), dal citato teorema della divergenza si sono dedotte le altre formole di trasformazione di integrali, date nei nn. 55, 56, 58.

Così, ad es., ponendo $\mathbf{u}=\mathrm{K}\alpha\mathbf{w}$ nella (1), ove α è un'omografia vettoriale e $\mathbf{w}$ un vettore, funzioni regolari di P e di t, ed osservando che {*T. l.*, pag. 32, [1]; e pag. 79, [3]}

$$\mathbf{n}\times\mathrm{K}\alpha\mathbf{w}=\alpha\mathbf{n}\times\mathbf{w}\quad,\quad \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha\mathbf{w})=\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\,\frac{d\mathbf{w}}{d\mathrm{P}}\right)+\operatorname{grad}\alpha\times\mathbf{w}\,,$$

si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \alpha\mathbf{n}\times\mathbf{w}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\alpha\mathbf{n}\times\mathbf{w})}{\partial t}\,d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\left\{\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\alpha\,\frac{d\mathbf{w}}{d\mathrm{P}}\right)+\operatorname{grad}\alpha\times\mathbf{w}\right\}d\sigma\,.$$

Se il vettore $\mathbf{w}$ è costante, nell'ultimo integrale un termine si annulla; e portando poi il $\mathbf{w}$ fuori degli integrali, per l'arbitrarietà di esso, si deduce

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \alpha\mathbf{n}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\alpha\mathbf{n})}{\partial t}\,d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,\operatorname{grad}\alpha\,d\sigma\,.$$

Se l'omografia α si riduce ad un numero φ, questa formula diventa identica alla (2).

Supponendo l'omografia α assiale, e cioè della forma $\mathbf{u}\wedge$, con $\mathbf{u}$ vettore funzione regolare di P e di t, questa formula porge, osservando che $\operatorname{grad}(\mathbf{u}\wedge)=-\operatorname{rot}\mathbf{u}$, {*T. l.*, pag. 84, [2]},

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathbf{u}\wedge\mathbf{n}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\mathbf{u}\wedge\mathbf{n})}{\partial t}\,d\sigma - \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,\operatorname{rot}\mathbf{u}\,d\sigma\,;$$

(1) Nel seguito, citeremo quest'opera colla notazione {*T. l.*}.

in particolare, supponendo $\mathbf{u} = \varphi(P - O)$, ove φ è un numero funzione regolare di P e di t, ed osservando che $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi \wedge (P - O)$, {*T. l.*, pag. 79, [2]}, si ha:

$$(2') \qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(P - O)\wedge \mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial t}(P - O)\wedge \mathbf{n}\, d\sigma + \\ + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,(P - O)\wedge \operatorname{grad}\varphi\, d\sigma\,.$$

Se la superficie σ fosse aperta, si otterrebbero formule analoghe alle precedenti, partendo dal teorema della variazione del flusso per le superficie aperte, che è espresso da (1)

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{u}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\mathbf{n}\times\mathbf{u})}{\partial t}\, d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times[\mathbf{v}\,.\,\operatorname{div}\mathbf{u} + \operatorname{rot}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})]\, d\sigma\,.$$

2. Profittando dell'occasione, permetta che La intrattenga ancora su un'altra formula generalissima, che ha molte applicazioni nell'Idrodinamica.

Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ tre vettori funzioni finite e continue, colle loro derivate prime, del punto P, variabile in uno spazio finito e fisso τ, limitato dalla superficie chiusa σ.

La formula in questione è allora la seguente (2):

$$(3) \qquad \int_\tau \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\right)\times\mathbf{w}\, d\tau = -\int_\sigma \mathbf{u}\times\mathbf{w}\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{n}\, d\sigma - \\ - \int_\tau \mathbf{u}\times\mathbf{w}\,.\,\operatorname{div}\mathbf{v}\, d\tau - \int_\tau \left(\frac{d\mathbf{w}}{dP}\mathbf{v}\right)\times\mathbf{u}\, d\tau,$$

ove $\mathbf{n}$ è un vettore unitario, normale a σ e diretto all'interno di τ.

La dimostrazione è semplicissima; si fa partendo dal teorema della divergenza, espresso dalla formula

$$(4) \qquad \int_\tau \operatorname{div}\mathbf{u}\, d\tau = -\int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{u}\, d\sigma, \quad \{T.\ l.,\ \text{pag. } 108,\ [1]\},$$

ponendovi $(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\,\mathbf{v}$ al posto di $\mathbf{u}$. Osservando che

$$\operatorname{div}[(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\,\mathbf{v}] = \mathbf{u}\times\mathbf{w}\,.\,\operatorname{div}\mathbf{v} + \operatorname{grad}(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\times\mathbf{v}, \quad \{T.\ l.,\ \text{pag. } 79,\ [2]\}$$
$$= \mathbf{u}\times\mathbf{w}\,.\,\operatorname{div}\mathbf{v} + \left(K\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{w} + K\frac{d\mathbf{w}}{dP}\mathbf{u}\right)\times\mathbf{v}, \quad \{T.\ l.,\ \text{pag. } 81,\ [1]\}$$
$$= \mathbf{u}\times\mathbf{w}\,.\,\operatorname{div}\mathbf{v} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\right)\times\mathbf{w} + \left(\frac{d\mathbf{w}}{dP}\mathbf{v}\right)\times\mathbf{u}, \quad \{T.\ l.,\ \text{pag. } 32,\ [1]\},$$

(1) Cfr. i citati *Éléments*, pag. 115, form. (11).

(2) Questa formula è pure stata riportata nella recente opera: Burali-Forti et Marcolongo, *Applications à la mécanique et à la physique*, pag. 140 (Pavia, Mattei e C., a. 1913).

si deduce, dalla (4),

$$\int_\tau \left[\mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{v} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} \mathbf{v} \right) \times \mathbf{w} + \left(\frac{d\mathbf{w}}{d\mathrm{P}} \mathbf{v} \right) \times \mathbf{u} \right] d\tau = -$$

$$- \int_\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \, d\sigma ,$$

che è precisamente la (3).

Se i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, sono, all'infinito, infinitesimi d'ordine conveniente, la (3) vale pure se τ indica il campo indefinito esterno alla superficie σ.

Per mezzo della (3) si possono dedurre facilmente, dal principio di Hamilton, le equazioni idrodinamiche di Eulero. Adoperando invece gli ordinarî metodi cartesiani, i calcoli risultano complicatissimi, come si può vedere nell'opera di W. Wien, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, § 10, pag. 47 (Leipzig, Hirzel, a. 1900), ove si trova, fra altro, una formula che occupa circa un'intera pagina!

Supponendo che il vettore $\mathbf{w}$ sia costante, esso può essere portato fuori degli integrali; e allora, per l'arbitrarietà di $\mathbf{w}$, dalla (3) si trae

$$(5) \qquad \int_\tau \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} \mathbf{v} \, d\tau = - \int_\sigma \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} \times \mathbf{n} \, d\sigma - \int_\tau \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\tau .$$

Ponendo, nella (5), $(\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \mathbf{u}$ al posto di $\mathbf{u}$, ove O indica un punto fisso, si deduce:

$$(6) \qquad \int_\tau (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} \mathbf{v} \right) d\tau = - \int_\sigma (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} \times \mathbf{n} \, d\sigma -$$

$$- \int_\tau (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \mathbf{u} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\tau + \int_\tau \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \, d\tau .$$

Queste formule sono utilissime in Idrodinamica. Ne ho già fatte diverse applicazioni [1] al calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide.

Le equazioni cartesiane equivalenti, che sono alquanto complicate, sono state assegnate e adoperate dal prof. Cisotti per stabilire il paradosso del d'Alembert [2].

[1] Boggio, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIX, parte 2ª, a. 1910; *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide*, Rendiconti di questa Accademia, ser. 5ª, vol. XX, 1° sem. 1911.

[2] Cisotti, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIX, parte 2ª, a. 1910.

Se, in particolare, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \text{grad}\,\varphi$, ove φ è un numero funzione regolare di P, la (5) porge, applicando formule note {*T. l.*, pag. 81, [1]; pag. 77, [3]},

$$\frac{1}{2}\int_\tau \text{grad}\,(\text{grad}\,\varphi)^2\,d\tau = -\int_\sigma \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{grad}\,\varphi \times \mathbf{n}\,d\sigma - \\ -\int_\tau \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{div grad}\,\varphi\,d\tau\,.$$

Il primo membro, col teorema del gradiente {*T. l.*, pag. 108, [3]}, si trasforma in $-\int_\sigma (\text{grad}\,\varphi)^2\,\mathbf{n}\,d\sigma/2$; perciò dall'eguaglianza precedente risulta:

$$\int_\sigma \mathbf{U}\,d\sigma = -\int_\tau \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{div grad}\,\varphi\,d\tau\,, \tag{7}$$

avendo posto, per brevità,

$$\mathbf{U} = \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{grad}\,\varphi \times \mathbf{n} - (\text{grad}\,\varphi)^2\,\mathbf{n}/2\,. \tag{8}$$

Questa formula è dovuta al prof. Levi-Civita [1], il quale ne ha fatto utili applicazioni.

Se la funzione φ è armonica (cioè div grad $\varphi = 0$), il secondo membro della (7) sparisce, e si ottiene la formula (7) della Sua Nota.

Nelle stesse ipotesi, la (6) porge:

$$\int_\tau (\text{P} - \text{O}) \wedge \frac{1}{2}\,\text{grad}\,(\text{grad}\,\varphi)^2\,d\tau = -\int_\sigma (\text{P} - \text{O}) \wedge \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{grad}\,\varphi \times \mathbf{n}\,d\sigma - \\ -\int_\tau (\text{P} - \text{O}) \wedge \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{div grad}\,\varphi\,d\tau\,.$$

Il primo membro può scriversi $-\int_\tau \text{rot}\,[(\text{grad}\,\varphi)^2\,(\text{P} - \text{O})]\,d\tau/2$; quindi, applicando il teorema della rotazione {*T. l.*, pag. 108, [2]}, esso si trasforma in $-\int_\sigma (\text{grad}\,\varphi)^2\,(\text{P} - \text{O}) \wedge \mathbf{n}\,d\sigma/2$; e perciò, ricordando la (8), si ha la formula seguente, analoga alla (7):

$$\int_\sigma (\text{P} - \text{O}) \wedge \mathbf{U}\,d\sigma = -\int_\tau (\text{P} - \text{O}) \wedge \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{div grad}\,\varphi\,d\tau\,. \tag{9}$$

Se la funzione φ è armonica, il secondo membro si annulla.

3. Sia ora C un corpo, che potrà comunque muoversi e deformarsi col tempo; e sia σ la sua superficie.

Supponiamo, come ha fatto Lei, che il corpo C sia immerso in una massa liquida, limitata, oltrechè da σ, da una superficie Σ, la quale potrà

[1] Levi-Civita, *Sulla contrazione delle vene liquide*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIV, parte 2ª, a. 1905.

risultare di più superficie, fisse o mobili, rigide o deformabili, ed anche coincidere, in tutto o in parte, colla sfera all'infinito.

L'azione esercitata sul corpo C dal liquido si può caratterizzare per mezzo del vettore risultante **R**, e del momento risultante **M** (rispetto ad un punto arbitrario O) del sistema di pressioni elementari che il liquido esercita sui singoli elementi $d\sigma$ della superficie σ del corpo C.

I due vettori **R**, **M** sono espressi da

$$\mathbf{R} = -\int_\sigma p\mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

$$\mathbf{M} = -\int_\sigma p(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

ove p è l'intensità della pressione in un qualunque punto P di σ, e $\mathbf{n}$ è un vettore unitario, normale a σ, e diretto all'interno della massa liquida.

Se φ è il potenziale di velocità, e si suppone incompressibile il liquido, e la sua densità eguale ad 1, le equazioni idrodinamiche si compendiano nell'unica relazione:

$$p = -\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{cost^e},$$

mentre la condizione d'incompressibilità esprime che la funzione φ deve essere armonica.

Si ha allora, dalle formule precedenti,

$$\mathbf{R} = \int_\sigma \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\,\mathbf{n}\, d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathbf{n}\, d\sigma,$$

$$\mathbf{M} = \int_\sigma \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\,(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{n}\, d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{n}\, d\sigma\,.$$

Trasformiamo gli ultimi termini colle (2), (2'); risulta:

$$\mathbf{R} = \int_\sigma \left\{\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\,\mathbf{n} - \mathbf{v}\times\mathbf{n}\,.\,\mathrm{grad}\,\varphi\right\} d\sigma + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

$$\mathbf{M} = \int_\sigma \left\{\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\,(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{n} - \mathbf{v}\times\mathbf{n}\,.\,(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathrm{grad}\,\varphi\right\} d\sigma + \\ + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{n}\, d\sigma.$$

Ora osserviamo che, in un punto P di σ, $\mathbf{v}\times\mathbf{n}$ essendo la proiezione, sulla normale, della velocità di P, rappresenterà pure la proiezione, sulla stessa normale, della velocità della particella liquida attigua a P; onde si avrà

$$\mathbf{v}\times\mathbf{n} = \mathrm{grad}\,\varphi\times\mathbf{n}\,;$$

sostituendo nelle formule precedenti, e ricordando la (8), si ottiene:

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathbf{R} = -\int_\sigma \mathbf{U}\, d\sigma + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi \mathbf{n}\, d\sigma , \\ \mathbf{M} = -\int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{U}\, d\sigma + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{n}\, d\sigma . \end{cases}$$

Indichiamo ora con s una superficie chiusa, che contenga C nel suo interno, e tale che lo spazio compreso fra σ ed s sia totalmente occupato dal liquido. Potremo applicare le (7), (9) all'insieme di queste due superficie, ed avremo, φ essendo armonica,

$$\int_\sigma \mathbf{U}\, d\sigma + \int_s \mathbf{U}\, ds = 0 \quad , \quad \int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{U}\, d\sigma + \int_s (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{U}\, ds = 0 ;$$

quindi, dalle (10), segue:

$$\mathbf{R} = \int_s \mathbf{U}\, ds + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi \mathbf{n}\, d\sigma ,$$

$$\mathbf{M} = \int_s (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{U}\, ds + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{n}\, d\sigma .$$

La prima di queste due formule concorda colla Sua formula (8).

Meccanica. — *Applicazione dei potenziali newtoniani della elasticità*. Nota II di Pietro Burgatti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

5. La nota estensione dei metodi di Green all'equazione dell'elasticità, quando venga fatta nella maniera più opportuna, fa appunto vedere che i potenziali definiti nella Nota precedente costituiscono gli elementi analitici fondamentali di cotesta teoria.

Indicando con β e β', $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}'$ rispettivamente due omografie e due vettori funzioni regolari dei punti P d'un campo S limitato dalla superficie σ, e soddisfacenti alla *relazione di reciprocità*

$$(7)\qquad \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\beta \frac{d\mathbf{s}'}{d\mathrm{P}}\right) = \mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\beta' \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{P}}\right),$$

si ottiene, da una nota formula (1),

$$(8)\qquad \int_\mathrm{S} \mathrm{grad}\,\beta \times \mathbf{s}' . d\mathrm{S} + \int_\sigma \beta \mathbf{n} \times \mathbf{s}' . d\sigma = \int_\mathrm{S} \mathrm{grad}\,\beta' \times \mathbf{s}' . d\mathrm{S} + \int_\sigma \beta' \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma ;$$

(1) *Analyse vect. générale*, tomo I, pag. 111, formula (2). Per le applicazioni dell'analisi vettoriale alla teoria dell'elasticità, vedi il volume 2° della stessa opera.

relazione fondamentale, che contiene tutte le relazioni del tipo di quelle comunemente chiamate lemmi di Green nella teoria dei potenziali ordinarii.

Supponiamo che sia $\operatorname{grad}\beta' = 0$. e che $\mathbf{s}'$ risulti infinito in un solo punto O di S come $\frac{1}{r}$ $(r = \operatorname{mod}(\mathrm{P} - \mathrm{O}))$. pur ritenendo soddisfatta la (7). In questo caso la (8) non ha più luogo. Possiamo però isolare il punto O con una sferetta σ_0 di centro O e raggio ε. e applicare la (8) allo spazio S_1 compreso fra σ e σ_0, ove $\beta\,\beta'$, $\mathbf{s}\,\mathbf{s}'$ son regolari. Si ottiene

$$(8') \qquad \int_{S_1} \operatorname{grad}\beta \times \mathbf{s}'\, dS_1 + \int_{\sigma} (\beta\mathbf{n}\times\mathbf{s}' - \beta'\mathbf{n}\times\mathbf{s})\, d\sigma = \\ = \int_{\sigma_0} \beta'\mathbf{n}\times\mathbf{s}\, d\sigma_0 - \int_{\sigma_0} \beta\mathbf{n}\times\mathbf{s}'\, d\sigma_0 .$$

Essendo $d\sigma_0 = \varepsilon^2\, d\Omega$, ove $d\Omega$ è l'elemento superficiale della sfera unitaria, si ha

$$\int_{\sigma_0} \beta\mathbf{n}\times\mathbf{s}'\, d\sigma_0 = \varepsilon \int_{\Omega} \beta\mathbf{n}\times\varepsilon\mathbf{s}'\, d\Omega ;$$

che, per le ipotesi fatte, tende a zero con ε. Inoltre

$$\int_{\sigma_0} \beta'\mathbf{n}\times\mathbf{s}\, d\sigma_0 = \mathbf{s}_1 \times \varepsilon^2 \int_{\Omega} \beta'\mathbf{n}\, d\Omega ,$$

ove $\mathbf{s}_1$ è un opportuno valore di $\mathbf{s}$ fra quelli che $\mathbf{s}$ assume sopra σ_0. Supposto

$$(9) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 \int \beta'\mathbf{n}\, d\Omega = \mathbf{c} \ \text{(costante)},$$

la (8') diventa, al limite,

$$(10) \qquad \mathbf{s}(\mathrm{O}) \times \mathbf{c} = \int_{\sigma} (\beta\mathbf{n}\times\mathbf{s}' - \beta'\mathbf{n}\times\mathbf{s})\, d\sigma + \int_{S} \operatorname{grad}\beta \times \mathbf{s}'\, dS ,$$

ove $\mathbf{s}(\mathrm{O})$ è il valore di $\mathbf{s}$ nel punto O. Altra formula fondamentale, che contiene tutte le formule particolari di questo tipo che si adoperano nella fisica matematica.

Ciò posto, veniamo ai problemi dell'equilibrio elastico dei corpi omogenei isotropi. Nelle formule precedenti, siano $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}'$ gli spostamenti relativi a due deformazioni elastiche infinitesime; β e β' le corrispondenti omografie delle tensioni interne (dilatazioni). La (7) è soddisfatta, perchè $\mathrm{I}_1\left(\beta\frac{d\mathbf{s}'}{d\mathrm{P}}\right)$ e $\mathrm{I}_1\left(\beta'\frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{P}}\right)$ vengono a rappresentare la stessa forma bilineare nelle componenti delle definite deformazioni. Inoltre prendiamo $\mathbf{s}' = \gamma\mathbf{a}$, che è il

potenziale newtoniano elementare dell'elasticità definito nella Nota precedente. Risulta, allora,

$$\operatorname{grad}\beta' \equiv \mathrm{E}(\gamma\mathbf{a}) = 0\,;$$

e, per le proprietà dette, si vede che è applicabile la (10). Bisognerà però calcolare il limite di $\int_{\sigma_0} \beta'\mathbf{n}\,d\sigma_0$ sulla sferetta di raggio ε, quando ε tende a zero. Per note formule, si ha, nel nostro caso [1],

$$-\frac{\beta'\mathbf{n}}{\varrho} = (\Omega^2 - 2\omega^2)\operatorname{div}(\gamma\mathbf{a})\,.\,\mathbf{n} - 2\omega^2\,\mathrm{D}\,\frac{d\gamma\mathbf{a}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{n}\,. \qquad (\varrho = \text{densità})$$

Prendendo $\gamma\mathbf{a}$ nella forma

$$\gamma\mathbf{a} = (\Omega^2 + \omega^2)\,\frac{\mathbf{a}}{r} - (\Omega^2 - \omega^2)\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\mathbf{a}\right)(\mathrm{P} - \mathrm{O})\,,$$

dopo alcuni calcoli, che qui omettiamo per brevità, si trova

$$-\frac{\beta'\mathbf{n}}{2\varrho\omega^2} = -\omega^2\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\mathbf{a}\right)\mathbf{n} + \omega^2\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\mathbf{n}\right)\mathbf{a} +$$

$$+ \Omega^2(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\operatorname{grad}\frac{1}{r} - (\Omega^2 - \omega^2)\left(\mathbf{a}\times\frac{\partial\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)(\mathrm{P} - \mathrm{O})\,;$$

e integrando quindi sopra σ_0, si ottiene facilmente ($\mathbf{n}$ normale esterna a σ_0)

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_0}\beta'\mathbf{n}\,d\sigma_0 = 8\pi\omega^2\Omega^2\varrho\mathbf{a}\,.$$

Questo è il valore di $\mathbf{c}$ nel caso presente; perciò la (10) diventa

$$8\pi\omega^2\Omega^2\varrho\mathbf{s}(\mathrm{O})\times\mathbf{a} = \int_{\mathrm{S}}\operatorname{grad}\beta\times\gamma\mathbf{a}\,d\mathrm{S} + \int_{\sigma}\beta\mathbf{n}\times\gamma\mathbf{a}\,d\sigma - \int_{\sigma}\beta'\mathbf{n}\times\mathbf{s}\,d\sigma\,.$$

Indicando con $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_\sigma$ rispettivamente le forze di massa e superficiali che conservano l'equilibrio nella deformazione definita da $\mathbf{s}$, si ha per le equazioni dell'equilibrio,

$$\operatorname{grad}\beta = \varrho\mathbf{F}\quad,\quad \beta\mathbf{n} = \mathbf{F}_\sigma\,;$$

perciò la precedente diventa

$$8\pi\omega^2\Omega^2\,\mathbf{s}(\mathrm{O})\times\mathbf{a} = \int_{\mathrm{S}}\mathbf{F}\times\gamma\mathbf{a}\,d\mathrm{S} + \frac{1}{\varrho}\int_{\sigma}\mathbf{F}_\sigma\times\gamma\mathbf{a}\,.\,d\sigma - \int_{\sigma}\frac{\beta'\mathbf{n}}{\varrho}\times\mathbf{s}\,d\sigma\,.$$

[1] *Analyse vect. gén.*, tomo II, cap. II.

Infine, introducendo l'omografia

$$\lambda = (\Omega^2 - 2\omega^2)\,\mathrm{H}(\mathrm{grad}\,\gamma\,,\,\mathbf{n}) + 2\omega^2\,\frac{d\gamma}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{n} - \omega^2\,\mathrm{H}'(\mathrm{Rot}\,\gamma\,,\,\mathbf{n}) = \lambda(\gamma\,.\,\mathbf{n})\,,$$

funzione di γ e $\mathbf{n}$, facilmente si trova

$$-\beta'\mathbf{n} = \varrho\lambda(\gamma\,,\,\mathbf{n})\,\mathbf{a}\ (^1).$$

Allora l'ultima formula diventa

$$8\pi\omega^2\Omega^2\,\mathbf{s}(\sigma)\times\mathbf{a} = \int_{\mathrm{S}}\mathbf{F}\times\gamma\mathbf{a}\,d\mathrm{S} + \int_{\sigma}\mathbf{F}_{\sigma}\times\gamma\mathbf{a}\,d\sigma + \int_{\sigma}\lambda(\gamma\,.\,\mathbf{n})\,\mathbf{a}\times\mathbf{s}\,d\sigma$$

$$= \int_{\mathrm{S}}\gamma\mathbf{F}\times\mathbf{a}\,d\mathrm{S} + \int_{\sigma}\gamma\mathbf{F}_{\sigma}\times\mathbf{a}\,ds + \int_{\sigma}\mathbf{K}\lambda(\gamma\,,\mathbf{n})\,\mathbf{s}\times\mathbf{a}\,d\sigma\,;$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$,

$$(11)\qquad 8\pi\omega^2\Omega^2\,\mathbf{s}(0) = \int_{\mathrm{S}}\gamma\mathbf{F}\,d\mathrm{S} + \int_{\sigma}\gamma\,\mathbf{F}_{\sigma}\,d\sigma + \int_{\sigma}\mathbf{K}\,\lambda(\gamma\,,\,\mathbf{n})\,\mathbf{s}\,d\sigma\,,$$

che compendia, in sostanza, sotto una nuova forma, le note formule fondamentali del Somigliana. I primi due integrali e una parte del terzo, quello corrispondente al termine medio di λ, sono appunto i potenziali newtoniani dell'elasticità considerati in principio. Si ha dippiù, nel terzo integrale, una parte dipendente da particolari potenziali ordinarii; per la ragione che alla equazione $\mathrm{E}\mathbf{s} = 0$ si soddisfa anche in modo speciale mediante certi potenziali ordinarii. Come si vede, dunque, i detti potenziali dell'elasticità entrano come elementi essenziali nelle formule fondamentali, e la conoscenza *a priori* delle loro proprietà facilita lo studio dei varii problemi, e rende più espressive le formule. Anche il metodo diretto qui seguìto per giungere alla (11), mi sembra notevole.

6. Introducendo l'operatore

$$\mathrm{E}' = \Omega^2\Delta' - (\Omega^2 - \omega^2)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}$$

(che potrà chiamarsi l'*associato di* E, perchè si deduce da E con lo scambio di Ω^2 con ω^2), si deduce

$$\gamma\mathbf{a} = \Omega^2\Delta'_0(r\mathbf{a}) - (\Omega^2 - \omega^2)\,\mathrm{grad}_0\,\mathrm{div}_0(r\mathbf{a}) = \mathrm{E}'_0(r\mathbf{a})\,.$$

Osservando poi che $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_{\sigma}$ non dipendono da 0, subito risulta

$$\int_{\mathrm{S}}\gamma\mathbf{F}\,d\mathrm{S} = \mathrm{E}'_0\Big(\int_{\mathrm{S}}r\mathbf{F}\,d\mathrm{S}\Big)\quad,\quad \int_{\sigma}\gamma\,\mathbf{F}_{\sigma}\,d\sigma = \mathrm{E}'_0\Big(\int_{\sigma}r\,\mathbf{F}_{\sigma}\,d\sigma\Big)\,.$$

(1) In generale con $\mathrm{H}'(\alpha\,,\mathbf{a})$ intendiamo quell'omografia funzione dell'omografia α, e del vettore $\mathbf{a}$, tale che per ogni $\mathbf{b}$ risulti $\mathrm{H}'(\alpha\,,\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \alpha\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}$.

Inoltre, essendo, per le cose dette,

$$\gamma = \Omega^2 \Delta_0 r - (\Omega^2 - \omega^2) \frac{d \operatorname{grad}_0 r}{dr} ,$$

facilmente si trova

$$\left(\frac{d\gamma}{d\mathrm{P}} \mathbf{n}\right) \mathbf{s} = \mathrm{E}_0' \left(\mathbf{s} \frac{\partial r}{\partial n}\right) .$$

e, quindi,

$$\int_\sigma \frac{\partial \gamma}{\partial n} \mathbf{s} . d\sigma = \mathrm{E}_0' \left(\int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n} \mathbf{s} . d\sigma \right) .$$

Queste formole fanno vedere le relazioni che passano fra i potenziali newtoniani dell'elasticità e gli ordinarii potenziali (vettori) biarmonici; e dànno ragione dell'importanza che questi ultimi acquistarono nelle moderne ricerche sulla teoria dell'elasticità (specialmente nei lavori del prof. Almansi).

Rispetto all'ultimo integrale della (11), con opportuni calcoli, che qui tralasciamo, si trova

$$\int_\sigma \mathbf{K} \lambda (\gamma . \mathbf{n}) \mathbf{s} . d\sigma = \mathrm{E}_0' \left\{ \omega^2 (2\omega^2 - \Omega^2) \operatorname{grad}_0 \varphi - \omega^2 \operatorname{rot}_0 \mathbf{n} + 2\omega^2 \int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n} \mathbf{s} . d\sigma \right\} ,$$

ove

$$\varphi = \int_\sigma (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) \, r \, d\sigma \quad , \quad \mathbf{n} = \int_\sigma (\mathbf{n} \wedge \mathbf{s}) \, r \, d\sigma ;$$

per conseguenza, posto

$$\mathbf{s}_1 = \int_\mathrm{S} r \mathbf{F} \, d\mathrm{S} + \frac{1}{\varrho} \int_\sigma r \mathbf{F}_\sigma \, d\sigma + \\ + \omega^2 \left\{ (2\omega^2 - \Omega^2) \operatorname{grad}_0 \varphi - \operatorname{rot}_0 \mathbf{n} + 2 \int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n} \mathbf{s} \, d\sigma \right\} ,$$

la (11) assume la forma

$$8\pi\omega^2\Omega^2 \mathbf{s}(0) = \mathrm{E}_0' \mathbf{s}_1 . \tag{12}$$

Dunque ogni $\mathbf{s}$, atto a rappresentare la soluzione d'un problema d'equilibrio elastico, può assumere la forma (12). Questa proposizione è l'inversa di un'altra, ben nota, del Boussinesq; secondo la quale si può sempre soddisfare all'equazione indefinita dell'equilibrio elastico con

$$\bar{s} = \mathrm{E}'(\bar{u}) , \text{ ove } \Delta' \Delta' \bar{u} = - \frac{1}{\omega^2 \Omega^2} \mathbf{F} .$$

Meccanica. — *Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica.* Nota I di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

La presente Nota è dedicata alla ricerca delle formole di rappresentazione degli integrali delle equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici isotropi, cioè di quelle formole della dinamica elastica che corrispondono alla formola di Green relativa all'equazione di Laplace, o alle formole di Somigliana relative alle equazioni dell'equilibrio elastico. La ragione che mi spinge alla presente pubblicazione, dipende dal porre in evidenza il carattere, che le dette formole hanno, di dare lo stato di vibrazione all'esterno di una superficie σ chiusa, quando questa si può ritenere bordo di onda all'inizio del moto, cioè quando le funzioni date sopra σ sono definite solo per gli istanti successivi ad uno assegnato. Le formole di rappresentazione richieste saranno perciò di utilità nella risoluzione del problema *esterno* della dinamica elastica nella forma che ad esso diedi ultimamente [1].

Il metodo qui seguìto mostra la non necessarietà di imporre condizioni di convergenza all'infinito delle funzioni incognite, poichè ad ogni istante il moto è racchiuso internamente a superficie tutte al finito; e inoltre non richiede nel moto quel carattere di permanenza che sarebbe acquistato solo per tensioni e velocità agenti *da tempo infinitamente remoto sulla superficie σ portante i dati.*

In un'altra Nota mostrerò che le formole trovate, come la formola di Green per l'equazione di Laplace, forniscono, nella forma che qui è data ad esse, un metodo di integrazione per le equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici.

Noterò, infine, che le considerazioni qui svolte si riattaccano ai metodi introdotti dal Volterra [2] nella scienza, e già con eguale intendimento applicati dal Tedone nella Memoria: *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei, isotropi* (Acc. reale delle scienze di Torino, tomo XLVII, 1897), allo stesso problema delle vibrazioni dei corpi elastici. Il metodo da me seguìto si differenzia da quello di quest'ultimo autore per la concezione fisica della propagazione di onde, e quindi per gli spazî a cui le integrazioni sono estese.

[1] Nella mia Memoria in corso di pubblicazione: *Sopra il problema esterno della Dinamica dei mezzi elastici isotropi,* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LXIV, serie I.

[2] *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes,* Acta math., tomo XVIII.

1. Il modo con cui intendo la propagazione del moto all'esterno di una superficie σ chiusa convessa (moto generato in uno spazio indefinito, occupato da un mezzo elastico, isotropo, nel quale è una cavità), è il seguente: Sopra σ, da un istante $t = 0$ in poi, sono date delle tensioni (o delle velocità); inizialmente il mezzo è in quiete. Ad un istante $t > 0$ qualunque, considero due superficie $\sigma_t^{(a)}$, $\sigma_t^{(b)}$ ottenute da σ portando sopra le sue normali verso l'esterno, a partire dai punti di σ stessa, dei tratti at, bt. Lo spazio compreso tra σ e $\sigma_t^{(b)}$ contiene i punti la cui vibrazione è decomponibile in una parte trasversale, ed una longitudinale. Per la continuità dello spostamento, la vibrazione longitudinale si annulla sopra $\sigma_t^{(a)}$, la trasversale sopra $\sigma_t^{(b)}$. La posizione del problema riesce più chiara quando ci riferiamo allo spazio a quattro dimensioni (x, y, z, t), considerando quindi il tempo come una coordinata. Considero allora il cilindroide Σ a generatrici parallele all'asse t la cui sezione con l'iperpiano $t = 0$ è la superficie σ, e le due ipersuperficie Σ_a, Σ_b, le cui generatrici hanno come proiezioni sopra $t = 0$ le normali a σ. e le cui pendenze, rispetto allo stesso iperpiano, sono $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$. Le sezioni di queste ipersuperficie con l'iperpiano $t = \tau$ sono le superficie $\sigma_t^{(a)}$, $\sigma_t^{(b)}$. Le funzioni che caratterizzano la vibrazione longitudinale sono definite nello spazio compreso tra Σ e Σ_a; quelle che definiscono la vibrazione trasversale sono definite tra Σ e Σ_b. Le prime si annullano sopra Σ_a, le altre sopra Σ_b. Entrambe sono determinate dal generare tensioni sopra Σ, equilibranti quelle date.

Ricercheremo le formole di rappresentazione per gli integrali di questo problema.

2. Il mezzo possa propagare solo onde longitudinali (mezzo fluido). Sia c la velocità di propagazione delle onde; l'equazione caratteristica del moto sarà:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi . \tag{1}$$

La formola di rappresentazione degli integrali di questa equazione (formola di Kirchhoff) si otterrà considerando, oltrechè il cilindroide Σ e la Σ_c (costruita come è indicato nel num. precedente), un cono Σ_1 di equazione

$$(t - \tau)^2 = \frac{r^2}{c^2} \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} ,$$

un cilindro Σ_2 di raggio ϱ e il cui asse è la retta

$$x = \xi \ , \ y = \eta \ , \ z = \zeta .$$

Nello spazio compreso tra $\Sigma, \Sigma_c, \Sigma_1, \Sigma_2$ si ha, se φ, ψ sono funzioni regolari in questo spazio e soddisfacenti la (1),

$$(2) \qquad \int_{\Sigma+\Sigma_c+\Sigma_1+\Sigma_2} (\varphi \mathrm{D}_\nu \psi - \psi \mathrm{D}_\nu \varphi)\, d\Sigma = 0,$$

nella quale si è posto

$$\mathrm{D}_\nu = c^2\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \nu}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial t}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial t},$$

ν essendo la normale interna. Si ponga

$$\psi = \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r}.$$

Si ha perciò, sopra Σ_1,

$$\psi = \mathrm{D}_\nu \psi = 0.$$

Sopra Σ_c si ha poi:

$$\varphi = \mathrm{D}_\nu \varphi = 0.$$

Quindi, osservando che sopra Σ si ha

$$\mathrm{D}_\nu \varphi = c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \qquad n = \text{normale esterna a } \sigma,$$

e sopra Σ_2

$$\mathrm{D}_\nu \varphi = c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho},$$

con un passaggio al limite per $\varrho = 0$, dalla (2) si ricava

$$(3) \qquad \int_\sigma d\sigma \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} \left(-\varphi \frac{t-\tau}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dt =$$

$$= 4\pi \int_{\frac{r_0}{c}}^{\tau} \varphi \,.\, (t-\tau)\, dt.$$

dove r_0 è la minima distanza del punto (ξ, η, ζ) dalla σ.

Dalla (3), con due derivazioni rispetto a τ, si ricava la formola di Kirchhoff [1].

[1] Per i dettagli di questo calcolo, cfr. la mia Nota, *Sulla formola di Kirchhoff per la propagazione delle onde*, Acc. sc. Torino, vol. 48, 1912-13. Nella seconda e penultima formola di pag. 397 vi è un errore che, però, nessuna conseguenza porta sulla esattezza del risultato.

Ho voluto, per sommi capi, ripetere il ragionamento che conduce, mi sembra, nel modo più naturale, alla formola di Kirchhoff, per mostrare che mediante esso, con facile generalizzazione, si può giungere pure rapidamente alle formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica. Basterà, in luogo della (2), applicare la formola di reciprocità del Betti, e, in luogo dell'integrale $-\frac{t-\tau+\frac{r}{c}}{r}$, usare degli spostamenti dovuti ad un centro di forza (formole di Stokes) nella forma ad essi data dal Somigliana (1) e da me lievemente modificata nella Memoria già citata.

3. Premetto una formola relativa alle equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici, equazioni che pongo sotto la forma:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial W}{\partial e_{xz}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

La W è il potenziale elastico unitario, ed e_{xx}, ... sono le componenti di deformazione. Sieno (u, v, w) (u', v', w') due terne di funzioni regolari in uno spazio S a quattro dimensioni, limitato da una ipersuperficie Σ chiusa. In S, queste due terne di funzioni verifichino le (4). Dal sistema (4), con metodi notissimi, si ricava:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(u'\dfrac{\partial u}{\partial t} + v'\dfrac{\partial v}{\partial t} + w'\dfrac{\partial w}{\partial t} - u\dfrac{\partial u'}{\partial t} - v\dfrac{\partial v'}{\partial t} - w\dfrac{\partial w'}{\partial t}\right) = \\ \qquad = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u'\dfrac{\partial W}{\partial e_{xx}} + v'\dfrac{\partial W}{\partial e_{xy}} + w'\dfrac{\partial W}{\partial e_{xz}}\right) + \cdots \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial e'_{xx}} + v\dfrac{\partial W'}{\partial e'_{xy}} + w\dfrac{\partial W'}{\partial e'_{xz}}\right) - \cdots \end{cases}$$

In essa, W' è il potenziale elastico relativo alle (u', v', w'), e e'_{xx} ... sono le corrispondenti componenti di deformazione. Integrando la (5) allo spazio S e usando della solita formola di trasformazione di un integrale di volume in integrale di superficie, si ottiene:

$$\int_\Sigma \left(u'\frac{\partial u}{\partial t} + \cdots - u\frac{\partial u'}{\partial t} - \cdots\right) d\Sigma =$$

$$= \int_\Sigma \left[u'\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial e_{yx}}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\frac{\partial z}{\partial n}\right) + \cdots\right.$$

$$\left. - u\left(\frac{\partial W'}{\partial e'_{xx}}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial W'}{\partial e'_{yx}}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial W'}{\partial e'_{zx}}\frac{\partial z}{\partial n}\right) - \cdots\right] d\Sigma,$$

(1) *Sulla propagazione delle onde dei mezzi isotropi*, Acc. sc. Torino, vol. XLI, an. 1905.

dove la n è la normale interna a Σ. Si ponga:

$$U = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{yx}}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\frac{\partial z}{\partial n}$$

$$V = \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{zy}}\frac{\partial z}{\partial n}$$

$$W = \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\frac{\partial z}{\partial n},$$

e posizioni analoghe per le U', V', W'. L'ultima formola diverrà:

$$(6) \qquad \int (u'U + v'V + w'W - uU' - vV' - wW')\, d\Sigma = 0 .$$

4. Consideriamo le ipersuperficie Σ, Σ_a, Σ_b del n. 1, i coni caratteristici $\Sigma_a^{(1)}$, $\Sigma_b^{(1)}$ di equazioni

$$(t-\tau)^2 = \frac{r^2}{a^2} \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

$$(t-\tau)^2 = \frac{r^2}{b^2}$$

e un cilindroide Σ_ϱ di raggio ϱ e coassiale con questi coni.

Sia n la normale interna a Σ_a (facente cioè, con l'asse t, angolo acuto); ν la normale a $\sigma_t^{(a)}$ nel punto corrispondente. Avremo:

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial \nu}\cos(n,\nu) = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{\partial x}{\partial \nu}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \nu} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} .$$

Sopra Σ_a avremo dunque:

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left\{ a\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{X_\nu}{\delta}\right\}, \ldots ,$$

essendo X_ν, Y_ν, Z_ν la tensione attraverso l'elemento superficiale di $\sigma_t^{(a)}$ di normale ν e δ la densità. Analogamente, sopra Σ_b si ha:

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\left\{ b\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{X_\nu}{\delta}\right\},$$

e formole simili si hanno sopra $\Sigma_a^{(1)}$ e $\Sigma_b^{(1)}$. Sopra Σ e sopra Σ_1 si ha, invece,

$$\frac{\partial t}{\partial \nu} = \frac{\partial t}{\partial \varrho} = 0 .$$

Quindi, sopra queste superficie, rispettivamente si ha:

$$U = -\frac{1}{\delta} X_\nu$$

$$U = -\frac{1}{\delta} X_\rho .$$

Supporremo che la propagazione all'esterno di σ avvenga per modo che sia

$$u = u_1 + u_2 \quad , \quad v = v_1 + v_2 \quad , \quad w = w_1 + w_2$$

nello spazio compreso tra Σ e Σ_b; e

$$u = u_1 \quad , \quad v = v_1 \quad , \quad w = w_1$$

nello spazio compreso tra Σ_b e Σ_a. Le (u_1 , v_1 , w_1) definiscono una vibrazione longitudinale; le (u_2 , v_2 , w_2) una vibrazione trasversale. Per la continuità dello spostamento, si ha:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_a$$
$$u_2 = v_2 = w_2 = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_b ,$$

da cui consegue [1]:

$$a \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{X_\nu^{(1)}}{\delta} = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_a$$

$$b \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{X_\nu^{(2)}}{\delta} = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_b ,$$

e formole analoghe. Le $X_\nu^{(1)} , Y_\nu^{(1)} , Z_\nu^{(1)}$ sono le tensioni dovute allo spostamento (u_1 , v_1 , w_1); e le $X_\nu^{(2)} , Y_\nu^{(2)} , Z_\nu^{(2)}$ quelle dovute allo spostamento (u_2 , v_2 , w_2).

L'applicazione della (6) ad una vibrazione generica regolare e ad una vibrazione dovuta ad un centro di forza, condurrà alle richieste formole di rappresentazione, come mostreremo in una prossima Nota.

[1] Cfr. la mia Memoria citata, cap. I; e Love, *Wave-motions with discontinuities on the front*, Proc. Lond. Math. Soc., 1904.

Matematica. — *Proprietà metriche intrinseche caratteristiche delle curve di un complesso lineare e delle superficie rigate di una congruenza lineare.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Le curve sghembe di (ossia le cui tangenti appartengono a) un complesso lineare di rette, si presentano in molte quistioni e sono state oggetto di ricerche da parte di Lie, Appell, Koenigs, Picard ecc. È quindi utile di possedere un criterio per riconoscere se una curva sghemba *data* appartiene, oppur no, ad un complesso lineare.

F. Egan [1] ha dimostrato che fra la curvatura σ e la torsione τ di una di tali curve passa una relazione, che involge anche le derivate τ' e τ'' di τ rispetto all'arco s. Noi invertiremo tale risultato; anzi, adoperando i metodi della *geometria intrinseca*, ritroveremo rapidamente la relazione di Egan, dimostreremo che essa caratterizza le curve di un complesso lineare e, data una di tali curve, daremo il modo di costruire il complesso a cui appartiene. Poi, accoppiando questo risultato con un altro del Picard, perverremo ad un criterio per riconoscere se una data superficie rigata [2] appartiene, oppur no, ad una congruenza lineare.

2. Affinchè una curva sghemba C appartenga ad un complesso lineare, è necessario e sufficiente che esistano una costante p ed una retta r [3], tali che ogni tangente t di C soddisfi alla relazione:

$$\text{dist}(r, t)\,\text{tang}(r, t) = p. \tag{1}$$

Siano $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$ le coordinate di r rispetto al triedro (mobile) formato dalla tangente t, dalla binormale e dalla normale principale di C nel punto estremo dell'arco s. Esse saranno funzioni di s legate dalle relazioni

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \tag{2}$$

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0; \tag{3}$$

[1] *The linear complex and a certain class of twisted curves*, Proceedings of the Royal Irish Academy, section A. Dublin, vol. XXIX, 1911, pag. 29.

[2] Non sviluppabile; poichè in una congruenza lineare, che non degeneri nel sistema delle rette di un piano, non esistono superficie sviluppabili.

[3] p è il *parametro*, ed r è l'asse del complesso lineare. Non può essere $p = 0$ (ossia il complesso non può essere *speciale*), altrimenti le tangenti di C si appoggerebbero ad r, e la C sarebbe piana.

e poichè r deve restare immobile al variare di s, esse dovranno anche soddisfare alle seguenti *condizioni di immobilità* (1):

$$(4) \qquad \alpha' - \sigma\gamma = 0 \quad , \quad \beta' - \tau\gamma = 0 \quad , \quad \gamma' + \sigma\alpha + \tau\beta = 0 \, ,$$

$$(5) \qquad \xi' - \sigma\zeta = 0 \quad , \quad \eta' - \tau\zeta = 0 \quad , \quad \zeta' + \sigma\xi + \tau\eta + \beta = 0 \, ,$$

ove gli accenti indicano derivate rispetto ad s. Essendo poi $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = \gamma_0 = \xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ le coordinate di t, si ha (2)

$$\text{momento}\,(r\,,t) = \text{dist}\,(r\,,t)\,\text{sen}\,(r\,;t) = -\Sigma(\alpha\xi_0 + \alpha_0\,\xi) = -\xi \, ,$$

e, inoltre, $\cos(r\,,t) = \alpha$; quindi la (1) diventa

$$(6) \qquad \xi = -p\alpha \, .$$

Risolvere la questione proposta, equivale a cercare le condizioni di compatibilità delle equazioni (2), (3), (4), (5) e (6) nelle $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\xi\,,\eta\,,\zeta$.

Ora, derivando la (6), si ha, per le (4) e (5),

$$(7) \qquad \zeta = -p\gamma \, ;$$

derivando ancora, si ha, per le (4), (5) e (6),

$$(8) \qquad \eta = -p\left(p + \frac{1}{\tau}\right)\beta \, ;$$

sostituendo (6), (7) e (8) in (3), si ha

$$(9) \qquad \beta = \sqrt{-p\tau} \, ;$$

poi dalle ultime due equazioni (4) si ha successivamente

$$(10) \qquad \gamma = \frac{\tau'}{2\tau^2}\sqrt{-p\tau} \quad , \quad \alpha = \frac{2\tau\tau'' - 3\tau'^2 + 4\tau^4}{4\tau^3}\sqrt{-p\tau} \, .$$

Infine, sostituendo nella (2) i valori (9) e (10) di $\alpha\,,\beta\,,\gamma$, si ha:

$$(11) \qquad \frac{(2\tau\tau'' - 3\tau'^2 + 4\tau^4)^2}{16\tau^5\sigma^2} + \tau + \frac{\tau'^2}{4\tau^3} = -\frac{1}{p} \, .$$

Viceversa; se la (11) è soddisfatta, le funzioni $\alpha\,\beta\,\gamma\,\xi\,\eta\,\zeta$ di s, definite dalle (6), ..., (10), soddisfanno al sistema (2), ..., (5). Ciò risulta dal procedimento da noi seguìto.

Dunque: *affinchè una curva sghemba* C, *definita dalle equazioni intrinseche* $\sigma = \sigma(\tau)\,,\tau = \tau(s)$, *appartenga ad un complesso lineare, è necessario e sufficiente che la funzione primo membro di* (11) *sia una co-*

(1) Cfr. E. Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca*, cap. IX, § 3, Napoli, 1895.
(2) Ibid., cap. IX, § 7.

stante $-\frac{1}{p}$; *il corrispondente complesso ha per parametro* p *e per asse la retta* $r(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta)$ *definita dalle* (6), ..., (10).

Affinchè il complesso sia reale, occorre e basta, per le (9) e (10), che τ abbia un segno costante, opposto a quello di p. Ne segue che: *le curve sghembe reali di un complesso lineare reale sono tutte o sempre destrorse o sempre sinistrorse.*

Notiamo, per finire, che il primo termine della (11) non può essere identicamente nullo, altrimenti, per la seconda delle (10), sarebbe $\alpha = 0$, ossia le tangenti di C sarebbero tutte ortogonali alla retta r, sicchè la C sarebbe piana, contro il supposto.

3. Ora consideriamo una superficie rigata R, non sviluppabile, sulla quale assumiamo come linee coordinate v le asintotiche rettilinee (generatrici); e siano

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 , \tag{12}$$

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''dv^2 , \tag{13}$$

le forme differenziali quadratiche che la definiscono. Le linee v sono asintotiche, quindi è $\mathrm{D} = 0$; e sono rette (geodetiche), quindi è $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0$ (1). La (13) si riduce a

$$2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 , \tag{14}$$

sicchè l'equazione differenziale delle asintotiche C del secondo sistema è

$$2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv = 0 . \tag{15}$$

Per un'asintotica C la curvatura σ e la torsione τ coincidono rispettivamente con la curvatura geodetica e con la torsione geodetica, e però valgono (2)

$$\sigma = \frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{FD}'' - 2\mathrm{GD}'}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}''}{\Delta}\right)\right] , \quad \tau = \frac{\mathrm{D}'}{\delta} , \tag{16}$$

(1) In generale $\left\{ \begin{matrix} rs \\ t \end{matrix} \right\}$ $(r, s, t = 1, 2)$ indicano i simboli di Christoffel costruiti con i coefficienti della (12). Notiamo incidentalmente che: *le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la forma* (12), *definita e positiva, rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una superficie rigata su cui le* v *siano le asintotiche rettilinee, sono*

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{-\mathrm{K}} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0 ,$$

ove K *è la curvatura della forma.* La seconda condizione risulta subito da una delle due note formole di Codazzi, oppure da alcune formole che servono a risolvere una quistione più generale. Cfr. M. Picone, *Sulle superficie flessibili ed inestendibili in rigate*, pag. 29, Annali di mat., tomo XXII, 1914.

(2) Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª ed., vol. I, §§ 85 e 92, formole (4*) e (18).

ove si è posto

$$(17) \qquad \delta = \sqrt{EG - F^2} \quad , \quad \Delta = \sqrt{ED''^2 - 4FD'D'' + 4GD'^2} .$$

Le asintotiche C sono anch'esse rette, solo quando è nullo il secondo membro della espressione (16) di σ; *ed allora* R *è una quadrica.* Escludendo questo caso, sarà $\sigma \neq 0$; e sarà pure $\tau \neq 0$, altrimenti le C sarebbero curve piane, e la R sarebbe sviluppabile (inviluppo dei piani delle C), contro l'ipotesi. È dunque lecito di imporre alle asintotiche C di soddisfare la (11), il che equivale ad imporre alla R di appartenere ad una congruenza lineare (1).

Ora, lungo un'asintotica C si ha, per la (15),

$$du = -\frac{D''}{2D'}\,dv \quad , \quad ds = \frac{\Delta}{2D'}\,dv ,$$

quindi

$$\frac{d}{ds} = \frac{du}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial v} = \Omega \quad , \quad \frac{d^2}{ds^2} = \Omega(\Omega) = \Omega^2 ,$$

ove Ω è l'operatore lineare

$$(18) \qquad \Omega \equiv \frac{1}{\Delta}\left(2D'\frac{\partial}{\partial v} - D''\frac{\partial}{\partial u}\right) ;$$

dunque le derivate τ', τ'' della torsione τ di C rispetto al suo arco s valgono, per la seconda delle (16),

$$(19) \qquad \tau' = \Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right) \quad , \quad \tau'' = \Omega^2\left(\frac{D'}{\delta}\right) .$$

Per le (16) e (19), il primo membro della (11) si muta nella seguente funzione φ di u, v:

$$(20) \qquad \varphi = \frac{\left\{2\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)\Omega^2\left(\frac{D'}{\delta}\right) - 3\left[\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)\right]^2 + 4\frac{D'^4}{\delta^4}\right\}^2}{16\frac{D'^5}{\delta^7}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FD'' - 2GD'}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2FD' - ED''}{\Delta}\right)\right\}^2} +$$

$$+ \frac{D'}{\delta} + \frac{\delta^3}{4D'^3}\left[\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)\right]^2 .$$

Pel teorema del § 2, essa deve ridursi ad una costante lungo ogni asintotica C: quindi dev'essere $\Omega(\varphi) = 0$. Dunque: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie rigata* R (*non sviluppabile, nè quadrica*),

(1) Poichè le superficie rigate di una congruenza lineare hanno la proprietà caratteristica, che ogni loro asintotica appartiene ad un complesso lineare. Cfr. Picard, *Traité d'analyse*, tom. I, cap. XII, § 29.

definita dalle (12) *e* (14). *appartenga ad una congruenza lineare, è che sia* $\Omega(\varphi) = 0$.

4. Quando sulla R sono note le asintotiche C, e queste si assumono come linee coordinate u, alla condizione precedente si può dare una forma semplice ed elegante, trovata, per altra via, da M. Picone (1): *il simbolo* $\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ *dev'essere il prodotto di una funzione della sola* u, *per una funzione della sola* v, *ossia*

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0 . \tag{21}$$

Accenniamo rapidamente a questa riduzione.

Essendo le u asintotiche, si ha $D'' = 0$: quindi

$$\Delta = 2D' \sqrt{G} \quad , \quad \Omega \equiv \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} ;$$

poi, per le formole di Codazzi (2),

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\delta}\right) = -2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{D'}{\delta} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\delta}\right) = -2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{D'}{\delta} ; \tag{22}$$

quindi (3)

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial u} = 2 \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} E + 2 \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} F \quad , \quad \dfrac{\partial F}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} E + \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) F + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} G , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial G}{\partial u} = 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} F + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} G , \\ \dfrac{\partial E}{\partial v} = 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} E + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} F \quad , \quad \dfrac{\partial F}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} E + \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) F + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} G . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial G}{\partial v} = 2 \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} F + 2 \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} G . \end{cases}$$

$$\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right) = -\frac{2D'}{\delta \sqrt{G}} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} ,$$

$$\Omega^2\left(\frac{D'}{\delta}\right) = -\frac{2D'}{\delta G}\left[\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2 - \frac{F}{G} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] ,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FD'' - 2GD'}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2FD' - ED''}{\Delta}\right) =$$

$$= -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{F}{\sqrt{G}} = \frac{\delta^2}{G\sqrt{G}} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} .$$

(1) *Sulle congruenze rettilinee* W, Rend. del Circ. mat. di Palermo, tomo XXXVII, nn. 15 e seg.; ed altra Memoria in corso di stampa (ivi).

(2) Cfr. Bianchi, loc. cit., pag. 120, formole (IV^{a}).

(3) Si ricordino le formole (cfr. Bianchi, loc. cit., § 31).

Sostituendo questi valori nella (20) e ricordando la formola (1)

$$(23)\qquad -G\frac{D'^2}{\delta^2}=\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+$$
$$+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2,$$

si ha

$$\varphi=\frac{GN^2}{\delta D'}+\frac{D'}{\delta}+\frac{\delta}{GD'}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}^2,$$

ove si è posto per semplicità

$$(24)\qquad N=\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\frac{F}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\ (2).$$

Ora dobbiamo esprimere che $\Omega(\varphi)=0$, ossia che $\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0$; con ciò otteniamo

$$\frac{N^2}{\delta^2}\left(\frac{\partial G}{\partial v}-G\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}-4G\frac{\partial\log\delta}{\partial v}\right)+\frac{2GN}{\delta^2}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{D'^2}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}-$$
$$-\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}-\frac{1}{G^2}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{2}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=0;$$

poi. sostituendo a $\frac{\partial G}{\partial v}$ il suo valore (a), a $\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}$ il suo valore tratto dalla (22), a $\frac{D'^2}{\delta^2}$ il suo valore (23), ed a $\frac{\partial\log\delta}{\partial v}$ il suo valore $\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$ (3), otteniamo

$$\frac{FN^2}{\delta^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{GN}{\delta^2}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{N}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0;$$

oppure, essendo $N\neq 0$,

$$\frac{FN}{\delta^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0;$$

(1) Cfr. Bianchi, loc. cit., § 37. Si noti che $-D'^2:\delta^2$ è la curvatura K della nostra rigata.

(2) Si noti che N non può esser nulla identicamente, altrimenti sarebbe nullo il primo termine del primo membro della (11) su ogni asintotica C, le quali perciò sarebbero curve piane (cfr. la fine del § 2).

(3) Cfr. Bianchi, loc. cit., § 56.

poi, sostituendo a $\frac{\partial N}{\partial v}$ il valore tratto dalla (24),

$$\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\frac{F}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]+$$

$$+\frac{FN}{\delta^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0.$$

Infine, eliminando $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{G}\right)$ mediante le (a), sostituendo ad N il suo valore (24), ed osservando che $\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$ [1], si riconosce che il primo membro dell'ultima uguaglianza stessa si riduce al suo primo termine, e che quindi l'uguaglianza stessa si riduce alla (21) del Picone.

Nota. Le quistioni qui trattate, con rappresentazioni e metodi di geometria differenziale *metrica*, lo erano già state con quelli della geometria differenziale *proiettiva* (Cfr. E. J. Wilczynsky, *Projettive differential geometry*, pag. 167, Leipzig, 1906).

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore cilindrico.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. In una Memoria che conto di pubblicare tra breve. ho studiato varie questioni relative alla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore metallico toroidale.

La trattazione delle stesse questioni nel caso di un conduttore cilindrico indefinito a sezione circolare, già da tempo è stata svolta in modo notevolmente semplice, stante la possibilità di prendere in esame delle propagazioni tipiche di onde elettromagnetiche, aventi, contemporaneamente, le tre proprietà di essere *sinusoidali*, *simmetriche* e *ciclomagnetiche*: tali cioè che — (z, ϱ, ψ) essendo un sistema di coordinate cilindriche coll'asse coincidente coll'asse del conduttore — per esse:

1° la dipendenza del campo elettromagnetico da t e z è caratterizzata da un fattore complesso della forma $e^{i(\nu t+qz)}$ (ν e q costanti reali);

2° il campo elettromagnetico risulta indipendente da ψ;

3° le linee di forza magnetica sono circoli situati in piani normali all'asse del conduttore e aventi il centro su tale asse (e le linee di forza elettrica sono tutte contenute in piani meridiani del conduttore).

[1] È la condizione di integrabilità del sistema (20).

Iniziando le mie ricerche mi proposi, naturalmente, di procedere per analogia col caso già trattato, prendendo in esame le propagazioni di onde che in un conduttore toroidale fanno riscontro alle propagazioni tipiche del caso cilindrico, e ad esse si riducono al crescere indefinito del raggio della circonferenza direttrice del toro.

Ma a ciò si opponeva, almeno a prima vista, una difficoltà, per il fatto che, potendosi escludere anche solo in base a un esame superficiale delle equazioni fondamentali del campo elettromagnetico che tali propagazioni fossero simmetriche rispetto alla direttrice del toro, risultava fallace il criterio che prima di ogni altro si affacciava alla mente per individuarle. Onde si presentava la questione di dare alle propagazioni tipiche del caso cilindrico una caratterizzazione che si prestasse meglio della primitiva loro definizione a determinare le propagazioni corrispondenti del caso toroidale.

Una caratterizzazione energetica avrebbe certamente fatto al caso mio: le semplici considerazioni che seguono mostrano che non è difficile pervenirvi effettivamente, permettendo di stabilire che le propagazioni in questione sono caratterizzate, dentro la totalità delle propagazioni sinusoidali di eguali periodi rispetto a t e z, dal fatto che per esse, in corrispondenza a un determinato valore dell'intensità efficace della corrente, ad ogni istante risulta minimo il calore di Joule (ed anche il valore dell'energia magnetica) relativo a un qualunque tratto del conduttore limitato da due piani perpendicolari al suo asse.

Questo è il risultato principale contenuto nella mia Nota: soltanto, l'ultimo paragrafo del lavoro è dedicato a stabilire, con considerazioni che non escono dall'ambito naturale del lavoro, alcune proprietà integrali delle funzioni di Bessel, che non mi consta siano state finora rilevate e che mi sono riuscite utili nelle ricerche, cui ho già accennato, relative ai conduttori toroidali.

2. Consideriamo un campo elettromagnetico avente per sede un cilindro metallico indefinito, la cui sezione sia un cerchio di raggio r.

Colle notazioni consuete, dentro il conduttore, potendosi ivi trascurare la corrente di spostamento di fronte alla corrente di conduzione, in base alle equazioni fondamentali di Heaviside-Hertz, avremo

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{E}. \end{cases}$$

In conseguenza, assunto come sistema di riferimento il solito sistema di coordinate cilindriche (z, ϱ, ψ), per $\varrho \leq r$ risulterà [1]:

[1] Per le espressioni effettive delle componenti del rotore in un generico sistema di coordinate ortogonali cfr. ad es.: *Max Abraham. Enc. der Math. Wiss.* IV, 14, n. 20.

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_z = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,H_\psi) - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial H_\varrho}{\partial\psi} \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_\varrho = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial H_z}{\partial\psi} - \dfrac{\partial H_\psi}{\partial z} \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_\psi = \dfrac{\partial H_\varrho}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial\varrho} \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_z}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,E_\psi) - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial E_\varrho}{\partial\psi} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\varrho}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial E_z}{\partial\psi} - \dfrac{\partial E_\psi}{\partial z} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\psi}{\partial t} = \dfrac{\partial E_\varrho}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial\varrho}\,. \end{cases}$$

3. Corrispondentemente alle singole terne di valori possibili per z, ϱ, t consideriamo i valori medi rispetto a ψ delle componenti di $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$:

$$E_z^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E_z\,d\psi \text{ ecc.} \quad ; \quad H_z^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_z\,d\psi \text{ ecc.}$$

Dalle (1), (2) segue

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_z^{(m)} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,H_\psi^{(m)}) \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,E_\varrho^{(m)} = -\dfrac{\partial H_\psi^{(m)}}{\partial z} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\psi^{(m)}}{\partial t} = \dfrac{\partial E_\varrho^{(m)}}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z^{(m)}}{\partial\varrho}\,. \end{cases}$$

Le (3) risultano suddisfatte allora [1] e allora soltanto che $E_z^{(m)}, E_\varrho^{(m)}, H_\psi^{(m)}$ siano dedotte da una soluzione $\Pi(z, \varrho, t)$ dell'equazione a derivate parziali

$$(4)\qquad \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right)$$

mediante le posizioni

$$(5)\qquad E_z^{(m)} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right),\quad E_\varrho^{(m)} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z},\quad H_\psi^{(m)} = -\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\,.$$

[1] V. Sommerfeld, *Ueber die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes.* Ann. d. Phys. *67* (1893), pag. 233.

Nel seguito diremo *dedotto* da una soluzione Π reale o complessa della (4) ognuno degli (infiniti) campi elettromagnetici, pei quali i valori di $E_z^{(m)}$, $E_\rho^{(m)}$, $H_\psi^{(m)}$ sono legati a Π dalle relazioni (5): convenendo, naturalmente, di considerare come identici due di tali campi, appena coincidono per essi le parti reali delle singole componenti di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{H}$.

È subito visto che si ha sempre un campo elettromagnetico dedotto da Π assumendo

$$E_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right), \quad E_\rho = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad H_\psi = -\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho},$$
$$E_\psi = H_z = H_\rho = 0.$$

Tale campo elettromagnetico è evidentemente l'unico campo elettromagnetico simmetrico e ciclomagnetico dedotto da Π.

4. Sia C la totalità dei campi elettromagnetici dedotti da una medesima soluzione Π della (4). Ci proponiamo di dimostrare che in C il campo simmetrico e ciclomagnetico è caratterizzato dal fatto che ad ogni istante esso minimizza il calore di Joule corrispondente a un qualunque tratto del conduttore compreso tra due piani perpendicolari al suo asse. Per far ciò, osserviamo che per qualunque campo dedotto da Π dovrà essere

$$E_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right) + E_z^{(\psi)}, \quad E_\rho = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z} + E_\rho^{(\psi)}, \quad E_\psi = E_\psi^{(\psi)},$$

$E_z^{(\psi)}$, $E_\rho^{(\psi)}$, $E_\psi^{(\psi)}$ essendo tali che per qualunque terna di valori di z, ϱ, t si abbia

$$\int_0^{2\pi} E_z^{(\psi)}\,d\psi = \int_0^{2\pi} E_\rho^{(\psi)}\,d\psi = \int_0^{2\pi} E_\psi^{(\psi)}\,d\psi = 0.$$

Se dunque diciamo Q il calore di Joule relativo al tratto del conduttore compreso tra i due piani $z = z_1$, $z = z_2$, avremo

$$Q = \sigma\int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^r \varrho\,d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi\,\{R^2e(E_z) + R^2e(E_\rho) + R^2e(E_\psi)\} =$$
$$= \sigma\int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^r \varrho\,d\varrho\left\{\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}R^2e(\Pi)\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial^2 R^2e(\Pi)}{\partial\varrho\,\partial z}\right]^2\right\} +$$
$$+ \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^r \varrho\,d\varrho\,\{R^2e(E_z^{(\psi)}) + R^2e(E_\rho^{(\psi)}) + R^2e(E_\psi^{(\psi)})\}$$

ciò che evidentemente è sufficiente a provare l'asserto.

5. In modo del tutto analogo si potrebbe provare che in C il campo elettromagnetico simmetrico ciclomagnetico è caratterizzato anche dal fatto che ad ogni istante esso minimizza l'energia magnetica, sempre nel senso precisato al § 4.

6. Sia Π periodica rispetto a z, con periodo $\frac{2\pi}{q}$, e rispetto a t, con periodo $\frac{2\pi}{\nu}$: con che, nel nostro conduttore si avrà una propagazione di onde elettromagnetiche.

In tale ipotesi l'intensità totale della corrente attraverso una sezione normale del conduttore:

$$J = \sigma \int_0^r \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} E_z \, d\psi = -2\pi\sigma r \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r}$$

ammetterà anch'essa il periodo $\frac{2\pi}{q}$ rispetto a z, e il periodo $\frac{2\pi}{\nu}$ rispetto a t, e il valore medio del quadrato della sua parte reale

$$(6)\quad J_{eff}^2 = \frac{\nu q}{4\pi^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dz \, R_e^2(J) = \nu q \sigma^2 r^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dz \, R^2 e \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r},$$

ci darà il quadrato dell'intensità efficace della corrente.

Sempre restando in tale ipotesi, consideriamo la totalità delle propagazioni di onde elettromagnetiche dedotte dalle infinite soluzioni della (4) che non differiscono da Π altro che per una costante moltiplicativa reale [1] h. Fissare il valore di h, equivarrà a fissare il valore dell'intensità efficace della corrente; onde, come corollario di quanto abbiamo stabilito al paragrafo precedente, si può asserire che nella totalità di propagazioni di onde considerata, la propagazione che in corrispondenza a un determinato valore dell'intensità efficace minimizza, nel senso già precisato, il calore di Joule (l'energia magnetica), sarà sempre simmetrica e cilomagnetica.

7. Tra tutte le propagazioni di periodi $\frac{2\pi}{q}, \frac{2\pi}{\nu}$, si ottengono le propagazioni sinusoidali, quando a caratterizzare la dipendenza di Π da z e da t si assuma il fattore complesso $e^{i(qz+\nu t)}$. Precisamente se poniamo

$$\Pi = e^{i(qz+\nu t)} u(\varrho),$$

e

$$K^2 = -\left(4\pi \frac{i\mu\nu\sigma}{c^2} + q^2\right).$$

[1] Più in generale, complessa ma di argomento assegnato.

si soddisfa alla (4) allora, e allora soltanto, che si faccia coincidere $u(\varrho)$, a meno di un'arbitraria costante moltiplicativa (reale o complessa) colla J_0 di Bessel riferita all'argomento (complesso) $K\varrho$.

Essendo attualmente, per la (6) (1):

$$J_{eff}^2 = \nu q \sigma^2 r^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dz \, R^2 e \left\{ e^{i(\nu t + qz)} \left(\frac{du}{d\varrho} \right)_{\varrho=r} \right\} = 2\pi^2 \sigma^2 r^2 \left| \frac{du}{d\varrho} \right|_{\varrho=r}^2 .$$

il valore dell'intensità efficace non dipenderà dall'argomento della costante moltiplicativa, ma solo dal suo modulo: e lo stesso, come è subito visto, accadrà per il valore del calore di Joule e dell'energia magnetica. Fissando il valore dell'intensità efficace della corrente, individueremo dunque una semplice infinità di soluzioni della (4) per le quali le propagazioni simmetriche e longitudinali corrispondenti avranno in comune (cfr. § 5) in ogni tratto del conduttore i valori dei calore di Joule e dell'energia magnetica. Con ciò (sempre in base alle conclusioni del § 5) resta evidentemente acquisita la preannunziata caratterizzazione energetica della propagazioni di onde possibili nel nostro conduttore, che al tempo stesso risultano sinusoidali, simmetriche, e ciclomagnetiche.

8. *Dimostrazione di due identità relative alle funzioni cilindriche.* Poniamo

$$k^2 = -4\pi \frac{i\mu\nu\sigma}{c^2} \quad , \quad x = k\varrho :$$

dalle (1), (2) segue che qualunque sia (il numero intero e positivo) n, si ottiene una propagazione sinusoidale di onde elettromagnetiche (indipendente da z) possibile nel nostro conduttore, assumendo:

$$E_z = e^{i(n\psi+\nu t)} J_n(x) \ , \ H_\varrho = -\frac{nc}{\mu\nu} \frac{1}{\varrho} e^{i(n\psi+\nu t)} J_n(x) \ , \ H_\psi = \frac{ck}{i\mu\nu} e^{i(n\psi+\nu t)} J_n'(x)$$

$$E_\varrho = E_\psi = H_z = 0 .$$

Riferendoci a tale propagazione di onde, a un istante generico indichiamo rispettivamente con Q e T il valore (indipendente da z) del calore di Joule e dell'energia magnetica per unità di lunghezza del conduttore. Detti Q_m e T_m i valori medî di Q e T rispetto a t, avremo, in base alla definizione stessa di Q e T (2):

(1) Si tenga presente che il valor medio rispetto a t del quadrato della parte reale di un'espressione complessa della forma $e^{i(\nu t+qz)}(a+ib)$ è dato da $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

(2) Cfr. la Nota precedente.

$$Q_m = \sigma \int_0^r \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} R^2 e(E_z)\, dt \right\} = \pi\sigma \int_0^r \varrho\, d\varrho\, |J_n(x)|^2$$

$$T_m = \frac{\mu}{8\pi} \int_0^r \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} R^2 e(H_z)\, dt + \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} R_e^2(H_\psi)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{c^2}{8\mu\nu^2} \int_0^r \varrho\, d\varrho \left\{ \frac{n^2}{\varrho^2} |J_n(x)|^2 + |k|^2 |J_n'(x)|^2 \right\}.$$

D'altra parte detto **U** il vettore complesso di Poynting — prodotto vettore di **E** per $\overline{\mathrm{H}}$ (1) moltiplicato per $\frac{c}{8\pi}$ — e Φ il valore (indipendente da t) del flusso (entrante) di **U** attraverso la superficie S che limita il pezzo di conduttore considerato, deve pure essere:

$$Q_m = Re(\Phi) \quad , \quad T_m = \frac{1}{2\nu} Re\left(\frac{\Phi}{i}\right).$$

Ora su S la componente di **U** secondo la normale interna è diversa da zero soltanto in quella sua parte che appartiene anche alla superficie del conduttore ed ivi assume il valore

$$\frac{c}{8\pi} E_z \overline{H}_\psi = \frac{\sigma \bar{k}}{2k^2} J_n(x)\, J_n'(\bar{x}).$$

Si perviene così alla conclusione che deve essere:

$$(6) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^r \varrho\, d\varrho\, |J_n(k\varrho)|^2 = Re\left(\frac{k\bar{b}}{k^2} J_n(kb)\, J_n'(\bar{k}b)\right) \\ \displaystyle\int_0^r \varrho\, d\varrho \left\{ \frac{n^2}{\varrho^2} J_n(k\varrho)|^2 + |k|^2 |J_n'(k\varrho)^2 \right\} = Re(\bar{k}b\, J_n(kb)\, J_n'(\bar{k}b)). \end{cases}$$

Le (6) hanno validità, per qualunque valore di n, tutte le volte che k^2 sia un immaginario puro.

(1) Rappresento, secondo il solito, con $\overline{\mathrm{H}}$ il vettore complesso coniugato di **H**.

Fisica. — *Sulla formazione della rugiada e della brina.* Nota di Antonino Lo Surdo, presentata dal Corrisp. A. Garbasso.

La rugiada e la brina si depositano sulle superficie dei corpi raffreddati per il raggiamento contro la volta celeste; questo raggiamento è massimo per una superficie nera ed ha l'intensità

$$(1) \qquad Q = \sigma\ (u^4 - \theta^4)$$

dove σ indica la costante di emissione del corpo nero, u la temperatura assoluta della superficie radiante, e θ quella grandezza che io ho già definito come temperatura virtuale del cielo (1), la quale rappresenta la temperatura di un corpo nero in equilibrio di radiazione colla volta celeste. Il corpo esposto tende quindi a raffreddarsi quando, come avviene sempre di notte, $\theta < u$; e θ rappresenta il limite inferiore al quale tende la temperatura della superficie raffreddandosi per la radiazione notturna.

Ciò posto, risultano evidenti per la superficie *nera* e per la *grigia* le due seguenti condizioni:

1) *Per la formazione della rugiada e della brina è necessario che la temperatura virtuale del cielo sia più bassa della temperatura per la quale è massima la tensione del vapor d'acqua contenuto nell'aria in prossimità della superficie radiante.*

2) *Per la formazione della brina è necessario che la temperatura virtuale del cielo sia minore di quella del ghiaccio fondente.*

Consideriamo il caso semplice del raffreddamento di una lamina estesa, isolata termicamente per modo che lo scambio di calore avvenga soltanto per radiazione, dalla superficie superiore orizzontale che supponiamo nera.

Indichiamo con l lo spessore, ed esso sia piccolo così da potere trascurare le differenze di temperatura dentro la lamina, ϱ la densità del corpo, c il suo calore specifico, ed u la temperatura la quale risulterà funzione del tempo t. L'eguaglianza fra il calore perduto dalla lamina e quello raggiato si può rappresentare coll'equazione:

$$(2) \qquad -\varrho l c \frac{du}{dt} = \sigma (u^4 - \theta^4).$$

(1) Nuovo Cimento. Fasc. di giugno 1913.

Integrando si ottiene:

$$(3) \qquad t = -\frac{\varrho l c}{2\sigma\theta^3}\left\{\frac{1}{2}\lg\frac{u-\theta}{u+\theta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\theta}\right\} + \text{cost};$$

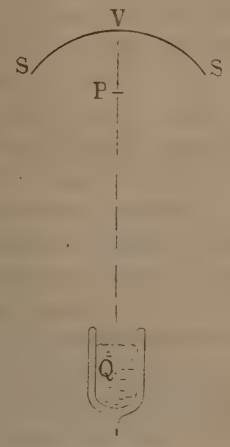
e ponendo $u = u_0$, per $t = 0$:

$$(4) \qquad t = \frac{\varrho l c}{2\sigma\theta^3}\left\{\frac{1}{2}\left[\lg\frac{u_0-\theta}{u_0+\theta} - \lg\frac{u-\theta}{u+\theta}\right] - \left[\operatorname{arctg}\frac{u_0}{\theta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\theta}\right]\right\}.$$

Questa espressione ci permette di calcolare il tempo che occorre perchè la lamina esposta verso un cielo a temperatura virtuale θ costante. si porti dalla temperatura iniziale u_0 alla temperatura u. Quindi se per u si pone la temperatura alla quale diventa massima la tensione del vapor d'acqua nell'aria, t indica il tempo di esposizione necessario perchè cominci la formazione della brina e della rugiada: tempo che al caso pratico deve considerarsi solo come un limite inferiore di quello effettivamente occorrente, che è maggiore a causa dello scambio di calore per convezione e del difetto di isolamento termico.

Per strati poco conduttori e di spessore rilevante non si può ammettere la uguaglianza della temperatura all'interno: essa allora dipende anche dalla distanza dalla superficie raggiante. Il caso più generale è quello di uno strato avente estensione e profondità indefinite. limitato da una superficie nera orizzontale radiante verso il cielo: ma il problema si presenta allora assai più complicato.

Una esperienza per mostrare la formazione della rugiada e della brina in condizioni di radiazione analoghe alle naturali si può facilmente eseguire esponendo una superficie raggiante verso un cielo artificiale a tempe ratura molto bassa, ma in modo che l'ambiente in prossimità della superficie non sia sensibilmente perturbato, colla seguente disposizione.



Uno specchio sferico metallico è disposto col suo asse V Q, verticale ed è rivolto in basso. Sull'asse, nell'intervallo tra il foco F ed il centro di curvatura, si dispone in P, la superficie raggiante orizzontale di piccola estensione rivolta verso l'alto. Tra la superficie P ed un corpo qualsiasi collocato nel piano coniugato avviene per mezzo dello specchio uno scambio di calore per radiazione, e se lo specchio avesse un potere riflettente unitario per le radiazioni che si scambiano, la superficie in P verrebbe a raggiare come se

invece che verso lo specchio fosse esposta sotto un cielo alla temperatura del corpo trovantesi in Q.

Nelle prove da me fatte il corpo radiante era costituito da un vetrino copri oggetti da microscopio, poggiato su un dischetto di feltro, il quale alla sua volta era sostenuto per mezzo di una asticella metallica orizzontale, sottile per ostacolare il meno possibile lo scambio di radiazione, fissata ad un sostegno laterale. Si aveva così un corpo radiante di piccola capacità termica, in certo modo isolato, il quale si può ritenere quasi nero per le onde di grande lunghezza.

Lo specchio era uno dei soliti ustori di ottone, della forma classica. La superficie radiante del vetrino non veniva completamente coperta dallo specchio, poichè il punto P risultava al di sotto del piano base della calotta sferica, ciò veniva a diminuire un poco l'estensione del cielo freddo, ma evidentemente l'effetto doveva essere di piccola entità, poichè diminuiva solo la radiazione con inclinazioni molto grandi.

Il punto Q veniva a trovarsi dentro un recipiente Dewar cilindrico contenente dell'aria liquida, molto ampio, perchè anche i raggi non centrali corrispondenti alle parti esterne dei fasci omocentrici provenienti dal vetrino vi potessero cadere dentro. Il liquido bolliva lentamente, e l'aria fredda si riversava traboccando dall'orlo, ma non dava perturbazioni sensibili poichè il Dewar era collocato in basso a sufficiente distanza dallo specchio.

Con questa disposizione, in un ambiente anche relativamente secco, nel quale cioè il punto di condensazione del vapor d'acqua era molto più basso della temperatura ambiente, si otteneva dopo qualche minuto di esposizione un abbondante deposito di rugiada sul vetrino: e per mostrare che essa era prodotta dalla radiazione bastava interporre uno schermo tra il vaso Dewar e lo specchio, anche al di sopra del vetrino; allora non si otteneva condensazione, e talvolta il deposito ottenuto prima si evaporava rapidamente.

Per ottenere la brina occorre che tanto la temperatura ambiente quanto quella per la quale la tensione del vapore d'acqua nell'aria diventa massima non siano molto al disopra dello zero; poichè se la condensazione del vapor d'acqua in forma di rugiada compensa il calore ceduto per la radiazione, la temperatura della lamina non può più abbassarsi. Ed ecco un esempio. Anche ammettendo che la radiazione avvenga contro un cielo alla temperatura dell'aria liquida, e trascurando tutte le cause che ostacolano il raffreddamento, se il punto di rugiada è al di sopra dello zero, in modo che la radiazione avvenga con un dislivello di 200° in cifra tonda, alla temperatura di + 10°, il calore raggiato risulta al minuto circa 8.10^{-11} ($283^4 - 83^4$), cioè circa 0,5 gr. cal. cm^2: per la compensazione basta un deposito di rugiada di gr. 0,0008 circa al minuto primo.

E bisogna pensare che molte cause ostacolano il raffreddamento e quindi agiscono come se la temperatura del cielo fosse notevolmente più alta. Difatti lo specchio ha un potere riflettente piccolo, non copre tutto il cielo, ed alla sua volta emette; l'aria che lambisce il vetrino cede calore per convezione.

Dall'applicazione della formula (4) risulta quindi un tempo molto più piccolo di quello che occorre effettivamente per la condensazione del vapor d'acqua sul vetrino.

Difatti nelle seguenti condizioni:

$$u_0 = 275° \quad \theta = 83° \quad u = 273°$$
$$l = 0{,}02 \text{ cm.} \quad \varrho = 2{,}5 \quad c = 0{,}2$$

il calcolo dà come tempo limite per l'inizio della formazione della brina ($u = o$) circa tre secondi: ma coll'esperienza non sono riuscito a osservare uno strato apprezzabile di brina prima di un paio di minuti (1).

L'esperienza è quindi semplicemente qualitativa.

Chimica fisica. — *Spettri di assorbimento a bassissime temperature.* Nota di Arrigo Mazzucchelli, presentata dal Socio E. Paternò.

Intorno all'influenza della temperatura sugli spettri di assorbimento delle soluzioni si è fatto molto lavoro (e cito, fra i recenti, gli studî di H. C. Jones); ma quasi tutte le osservazioni si riferiscono a innalzamenti di temperatura al disopra dell'ordinaria.

Sull'influenza delle basse temperature si è fatto assai meno. Degni di nota sono gli interessantissimi studî di H. e J. Becquerel e Kamerlingh Onnes, sugli spettri di fosforescenza dei sali di uranile sino alla temperatura dell'idrogeno bollente, dai quali è risultato che a temperature assai basse le bande divengono più strette e meglio definite. Qualcosa di simile può supporsi che debba avvenire per le bande di assorbimento, poichè fra queste e le bande di fosforescenza esiste una stretta relazione che è stata posta in chiaro dagli studî dei Becquerel.

Io ho iniziato una serie di ricerche in proposito; e in questa Nota preliminare rendo noti i primi risultati ottenuti, che mi incoraggiano a seguitare per questa via.

Per poter riconoscere sin da principio la massima influenza delle basse temperature sugli spettri, è bene di operare colla temperatura più bassa

(1) È bene notare però che occorre circa un minuto e mezzo perchè si depositi uno strato dello spessore di un centesimo di millimetro di brina, quando il calore raggiato alla temperatura $u = 273°$ contro il cielo a temperatura $\theta = 83°$ si compensa con quello di liquefazione e solidificazione.

possibile: e come tale si offre subito quella di ebollizione dell'aria liquida, che oggi è così facile a produrre.

Veramente, non è facile di trovare liquidi che possano usarsi come solventi a —180°; ma io ho pensato che si poteva forse congelare in un blocco trasparente una soluzione fondente a una temperatura più alta. Come solvente dovrebbe prestarsi bene l'alcool etilico, che per intenso raffreddamento si addensa sino a divenire un vetro solido. La cristallizzazione della sostanza disciolta viene per tal modo a esser fortemente ostacolata dalla viscosità sempre crescente; e questa azione è favorita dalla velocità del raffreddamento, per immersione diretta della provetta nell'aria liquida.

La esperienza ha confermato le mie previsioni. Ho fatto poi anche qualche tentativo su miscugli di alcool etilico e glicerina, ove la viscosità è rilevante anche a temp. ordinaria, o di alcool metilico ed etilico, ove il punto di solidificazione viene ad esser fortemente depresso; ma questi mi hanno dato cattivi risultati, perchè il miscuglio con glicerina nell'aria liquida si rapprende in un vetro, ma questo si screpola subito: il miscuglio con alcool metilico si trasforma subito in una massa bianca, evidentemente per cristallizzazione dell'alcool metilico.

Può però darsi che questi miscugli, o altri con altri alcooli, etere etilico, ecc., diano buoni risultati a temperature un pò meno basse, e cioè al disopra del loro punto eutettico; e mi riservo di fare esperienze in proposito per indagare a questo modo anche la influenza del solvente a temperatura bassa.

Pel momento mi sono limitato all'uso dell'alcool etilico (l'assoluto del commercio), e ho usato come sostanze disciolte alcuni sali di uranio, e qualche colore organico.

Sulla tecnica delle misure non ho molto da dire, perchè fatta con mezzi di ripiego che andranno perfezionati. Avevo dapprima tentato di usare per le soluzioni recipienti cilindrici di metallo, alla cui estremità erano masticiati due dischi di vetro a faccie piane e parallele, che appariscono assai convenienti dal punto di vista ottico; ma ne ho sospeso l'uso, perchè non ho ancora trovato un mastice che resistesse all'alcool, pur mantenendosi sufficientemente elastico a così bassa temperatura. Sono però già in costruzione simili apparecchi in vetro di quarzo, dal cui uso mi attendo buoni risultati. Ho perciò adottato semplici provette di vetro, del diametro di circa 25 mm., a cui è saldato un tubo più stretto pel riempimento. Queste vengono immerse verticalmente dentro il vaso Dewar, che è fasciato esteriormente da carta nera, ove son praticati due fori rotondi pel passaggio della luce. Le molte superfici rifrangenti, colle loro aberrazioni, costituiscono una piccola difficoltà per illuminare convenientemente la fenditura dello spettrografo, tanto più che occorre lavorare con una certa rapidità; ma, con un pò di pazienza, tal difficoltà si può superare.

La rapidità è resa necessaria dal fatto che, dopo un pò di tempo che è nell'aria liquida, anche l'alcool puro, dopo solidificatosi, si riempie di screpolature che lo rendono opaco. Per questa ragione io usavo di immergere bruscamente la provetta nell'aria liquida (sebbene di vetro, reggono assai bene al trattamento), e cominciare la fotografia non appena cessa lo svolgimento violento di gas, e l'aria liquida è ritornata in calma. Poichè l'alcool è un cattivo conduttore, è probabile che a questo punto la temperatura non si sia ancora pareggiata nell'interno della provetta; e se ne ha anzi una prova diretta, nel fatto che, dopo estratto dal bagno, l'alcool non si mostra sempre indurito allo stesso modo: può anzi darsi che la screpolatura abbia luogo quando, a raffreddamento completo, tutto l'alcool ha perduto lo stato pastoso ed è divenuto un vetro fragile.

Per questa ragione non è detto che gli spettri da me osservati si riferiscano proprio a —180°, ma, verosimilmente, a temperature un pò superiori. Quando potrò adoperare, come già hanno fatto altri, bagni di pentano raffreddati con aria liquida alla temperatura voluta, spero di ottenerne migliore definizione sotto questo riguardo.

Tutte le soluzioni da me esaminate in queste condizioni si trasformano in vetro omogeneo e trasparente, senza alcun accenno a separazione della sostanza disciolta. È un fenomeno che mi contento di constatare, senza volerne dare una spiegazione categorica; verosimilmente si tratta di uno stato metastabile; ma non si può escludere che, avendo io usato soluzioni abbastanza diluite (non oltre l'1 %), il limite di solubilità non fosse ancora raggiunto, almeno per alcune. Anche qui, esperienze a temperatura meno bassa potranno portare luce.

Come sorgente luminosa ho adoperato sempre una lampada Nernst; come apparecchio, uno spettrografo di Hilger già usato in precedenti ricerche (Rend. Acc. Lincei, XXII, sem. 2°, 1913, pagg. 445-451); come lastre, sia le *special plates* di Wratten e Wainwright, sia le *extrarapides* di Lumière (per alcuni sali uranilici). La posizione delle bande fu determinata, al solito, dal confronto con lo spettro dell'elio.

Ecco ora la preparazione delle varie soluzioni, e i loro spettri.

Solfato uranilico. Una soluzione all'1 % circa di questo sale, ottenuto per azione dell'anidride solforosa a caldo sul perossido di uranio sospeso nell'acqua (1), alla quale si aggiunse l'1 % di acido solforico puro. Il sol-

(1) È un metodo di preparazione che adopero fino dai miei primi studî sul perossido di uranio, e che è stato adottato anche da altri. Questo composto si presta bene alla depurazione dell'uranio, e per azione del SO_2 se ne ha quantitativamente il solfato senza eccesso di acido libero, soprattutto se, a dissoluzione compiuta, si scaccia l'SO_2 mediante una corrente di aria. L'attacco del perossido è dapprima un pò stentato; ma dopo che se ne è disciolto un poco, l'azione si accelera assai, evidentemente perchè il solfato scioglie in piccola quantità il perossido formando qualcuno di quei composti misti di

fato uranilico, ottenuto evaporando a b. m. la sua soluzione (secondo i dati della letteratura, si forma così l'idrato $UO_2 . SO_4 + H_2O$), è solo assai lentamente, ma completamente, solubile nell'alcool; mentre se si concentra solo a sciroppo la sua soluzione, si ha dissoluzione immediata. Sembra, perciò, che il solfato non si sciolga nell'alcool allo stato anidro, ma come idrato, come fanno molti sali inorganici di fronte ai solventi organici (1): e il ritardo nella dissoluzione del monoidrato sarebbe appunto richiesto dall'assorbimento dell'acqua a spese dell'alcool non del tutto anidro. Altri sali uranilici si comportano allo stesso modo.

Lo spettro di questa soluzione a temperatura ordinaria ha i caratteri soliti dei sali uranilici; ma le bande ne sono sfumate e maldefinite. Se ne ha una prima fra 509 e 491 circa (ove è molto sfumata) (2) che corrisponde alla *a* secondo la denominazione di Jones (*Absorption spectra of solutions*, Washington, 1910), che seguiremo in questo lavoro: una seconda, a orli assai sfumati, fra 478 e 473, che sarebbe la *b*; e una terza, *c*, tra 458 e 454. A 445 comincia un'altra banda che si confonde nell'assorbimento generale.

Nello spettro a bassa temperatura ho osservato due bande a orli netti, una fra 635 e 626, e una fra 582 e 576. Per la loro posizione non han riscontro nei sali uranilici, e non è quindi escluso che sian dovute a un pò di sale uranoso formatosi durante la dissoluzione a caldo. Deve in ogni caso trattarsi di piccole quantità, perchè, avendo esposto questa stessa soluzione al sole in tubo chiuso alla lampada per operarne la riduzione, si ebbe formazione di precipitato fioccoso, verde chiaro, con completo scoloramento del liquido: il solfato uranoso, cioè, è quasi insolubile in alcool, sebbene forse la presenza di sale uranilico, come si osserva in casi analoghi, ne possa facilitare la dissoluzione. In ogni caso, è degno di nota che queste bande non compaiono a temperatura ordinaria. Nella parte più rifrangibile dello spettro parrebbe, dalla fotografia, che si avesse assorbimento completo; ma la cosa richiede ulteriori prove, potendo trattarsi solo di insufficiente esposizione, non essendo sempre agevole ottenere la illuminazione conveniente.

---

cui mi sono occupato altrevolte (Rend. Acc. Lincei, XVI, fasc. 2°, 1907, pagg. 578-582), e facilitandone così la riduzione. Dal solfato poi è facile di preparare gli altri sali per doppia decomposizione coi sali di bario.

(1) G. Bruni ne ha dato la diretta dimostrazione con misure crioscopiche (Gazz. chim., *35*, 1, 1905, pagg. 448-460).

(2) Qui, dove per necessità di cose si opera a spessore costante, non posso, come nei lavori precedenti, ove si lavorava a spessore variabile, indicare i centri delle bande, ma devo limitarmi a indicarne la posizione dei bordi nelle condizioni da me sperimentate. Ciò è sufficiente, trattandosi soprattutto di far rilevare le differenze fra la temperatura ordinaria e quella dell'aria liquida.

Cloruro uranilico. Soluzione all' 1 % del prodotto Kahlbaum, col 5 % di acido cloridrico fumante. A temperatura ordinaria si osservano le bande: a_1, sfumata, fra 537 e 510; *a*, debole, fra 504 e 491; *b*, fra 479 e 472; *c*, fra 462 e 454. A 444 comincia una banda che si fonde nell'assorbimento generale. A temperatura bassa si osservano due bande strette, che non compaiono a temperatura ordinaria, una fra 635 e 626, e una fra 581 e 576: nel resto dello spettro comincia presto l'assorbimento generale, che potrebbe anche essere dovuto a esposizione insufficiente. Qui pure è da ripetere la osservazione, fatta sopra, circa la possibile esistenza di sale uranoso, e la necessità di nuove determinazioni.

Questa stessa soluzione, esposta al sole in tubo chiuso, e filtrata per separarla da un pò di precipitato formatosi, diede una soluzione di *cloruro uranoso*, il cui spettro a temperatura ordinaria presentò le seguenti bande: fra 681 e 669; debole e sfumata, col centro a 650; fra 634 e 617, debole, e sfumata verso il violetto. Due ultime si intravvedono verso 474 e 458.

Il raffreddamento con aria liquida fa variare alquanto la posizione e il numero delle bande, le quali acquistano sopra tutto una grande nettezza. Si osserva così: una banda, assai netta, fra 684 e 671; una netta ed estesa fra 666 e 628; poi fra 579 e 576, fra 560 e 547, fra 502 e 475, sfumata verso il violetto. A 431 lo spettro cessa bruscamente, forse per l'inizio di una nuova banda.

Bromuro uranilico. Soluzione circa all' 1 % di questo sale, la cui soluzione si era ottenuta da solfato uranilico e bromuro di bario, e tirata a secco in corrente di CO_2 (il bromuro, come il cloruro, è facilmente solubile in alcool anche a secco). A temperatura ordinaria, in varie fotografie, non ho ottenuto che uno spettro continuo, con tutt'al più indizî di disuguale trasparenza. L'esperienza mi ha mostrato che da simili risultati si può solo concludere per una grande debolezza delle bande di assorbimento, senza tuttavia poterne escludere la esistenza. Invece nell'aria liquida compaiono due bande sfumate, cioè fra 481 e 475, e fra 465 e 455.

Joduro di uranile. La preparazione di questo sale ha dato per ora risultati meno soddisfacenti. Per doppia decomposizione fra solfato uranilico e ioduro di bario, un pò acido per HJ libero, poi tirando a secco in corrente di CO_2, si ebbe soprattutto un residuo insolubile in alcool, verde nero, (forse UO_2 o U_3O_8), e la dissoluzione alcoolica era fortemente colorata in bruno per iodio. Per assorbirlo si sbattè con Hg in tubo chiuso alla lampada, arrestando l'assorbimento, che ha luogo solo a caldo e per forte agitazione, quando la soluzione era solo debolmente bruna. Concentrando invece la soluzione acquosa di ioduro solo a piccolo volume, non si ebbe liberazione di iodio: e quel poco, che tornò a formarsi durante la successiva diluizione con alcool e filtrazione, fu assai più facile a eliminare con Hg; ma il liquido, il cui titolo alcoolico poteva essere fra il 95 e il 90 %, divenne

opalescente, e infine opaco per immersione nell'aria liquida. Riprendendo la temperatura ambiente, ritornò gradualmente limpido. Pel momento non si è avuto tempo di fare ulteriori preparazioni, e si è esaminata la prima soluzione, che a temperatura ordinaria ha dato due bande, una abbastanza netta fra 564 e 562,5, e una fra 557 e 549, ove l'orlo è sfumato. Data la colorazione bruna, che accenna a presenza di iodio, non parrebbe che si potessero attribuire a sale uranoso. A bassa temperatura, nella mia fotografia si osserva solo una banda, debole ma abbastaza netta, fra 471 e 467. Le esperienze saranno ripetute.

Come già si è reso noto (Rend. Acc. Lincei, XXII, sem. 2°, 1913, pag. 448), i sali uranilici dei tre acidi paraossibenzoici si distinguono per i loro caratteri otticamente anormali. Poichè sono anche solubili in alcool, se ne presentava tanto più interessante lo studio.

Meglio solubile è il salicilato uranilico (da cloruro uranilico e salicilato di potassio in quantità equivalenti, tirando poi a secco e riprendendo con alcool). Si ha un bel liquido rosso, che deve essere fortemente diluito perchè lasci impressionare la lastra, e che mi ha dato uno spettro continuo. Lo stesso osservammo nel lavoro sopracitato, ove, tra varie fotografie, solo una ci diede accenni di bande. Ed è appunto su questi risultati che si basa la osservazione della pagina precedente. Raffreddando con aria liquida, il rosso passa al solito giallo dei sali uranici, già a temperatura assai superiore a quella di addensamento dell'alcool, e si ottiene uno spettro con tre bande abbastanza nette, e cioè fra 480 e 477, fra 463 e 462, fra 447 e 443. Come si vede, la influenza della temperatura sulle proprietà ottiche risulta qui in modo particolarmente chiaro.

Allo stesso modo fu preparato il paraossibenzoato uranilico, che è assai meno solubile del salicilato. La sua soluzione è gialla anche a temp. ordinaria, e presenta le due bande: fra 466 e 461, un pò sfumata, e fra 451 e 444; a 433 lo spettro termina bruscamente, forse per la presenza di un'altra banda, che però non è identificabile. Alla temperatura dell'aria liquida si osservano le bande: fra 478 e 477; fra 465 e 458 (queste due abbastanza nette); fra 448 e 441, più sfumata. Lo spettro termina bruscamente a 431. Anche qui, come si vede, l'abbassamento di temperatura ha fatto comparire una nuova banda: esso ha reso poi assai meglio definite le preesistenti.

Infine, per riconoscere se questa variazione delle bande di assorbimento è un fenomeno generale di tutte le sostanze colorate, ho esaminato in soluzione alcoolica diluitissima (come è necessario per avere sufficiente trasparenza) i tre coloranti del catrame: eosina A (Badische Sodafabrik), verde brillante cristallizzato (Meister Lucius), bleu di metilene. L'eosina a temperatura ordinaria, mostra una larga banda fra 550 e 470, mentre nell'aria liquida i limiti erano 547 e 474. Pel verde brillante si ebbe: banda fra 666 e 559

a temp. ordinaria; fra 674 e 563 nell'aria liquida. Pel bleu di metilene, a temp. ordinaria, banda fra 691 e 566, con zona di assorbimento debole e indefinita fra 513 e 492. Nell'aria liquida, la zona di assorbimento restò ugualmente maldefinita, e la banda era fra 686 e 563. A occhio nudo il colore o la fluorescenza delle soluzioni non variarono sensibilmente pel raffreddamento.

Si tratta, in complesso, di variazioni ben piccole: e l'influenza delle basse temperature pare perciò essenzialmente limitata a quei corpi, come i sali di uranio, ove l'assorbimento selettivo è proprietà di uno degli elementi.

Intendo esaminare sotto questo punto di vista anche i sali di qualche terra rara.

Con questa Nota preliminare ho inteso soprattutto di prendere data per potere compiere gli studî su questo argomento, che richiedono una tecnica speciale, la quale deve essere pazientemente elaborata.

Chimica. — *Sugli ossialogenuri di piombo* (1). Nota di G. Sandonnini, presentata dal Socio G. Ciamician.

Sono noti parecchi ossicloruri, ossibromuri ed ossijoduri di piombo, ma non si ha nessun dato certo concludente per la esistenza di ossifluoruri.

Berzelius (2) ne suppose la formazione per trattamento di una sospensione acquosa di fluoruro con ammoniaca, ma non potè isolare nessun composto definito; esistono pure esperienze di Fremy (3); questi facendo agire vapor d'acqua sul fluoruro ad alta temperatura credette di giungere alla formazione di un ossifluoruro.

Dei molti ossicloruri di cui venne data come certa l'esistenza a bassa temperatura, Ruer (4) per fusione dei componenti ne constatò la formazione solamente di due della composizione $PbCl_2 . PbO$ e $PbCl_2 . 2PbO$, i quali si trovano anche in natura, e sono noti rispettivamente come la matlockite e la mendipite. Oltre a questi due composti dal Ruer venne constatata l'esistenza di un nuovo composto corrispondente alla formula $PbCl_2 . 4PbO$.

Era quindi non privo di interesse studiare ad alta temperatura il comportamento degli altri alogenuri di piombo coll'ossido, e specialmente quello del fluoruro dato lo speciale comportamento dei fluoruri. Infatti è ben noto come mentre tra cloruri, bromuri, joduri di metalli mono e bivalenti, la for-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova diretto dal prof. G. Bruni.

(2) Moissan, *Traité de Chimie gen.*, IV, pag. 997.

(3) Gmelin, *Handb.*, I, 2, pag. 27.

(4) Zeit. f. an. Chem., *49*, 365 (1906).

mazione di soluzioni solide avviene in rapporti molto larghi, questa è molto più limitata tra fluoruri e gli altri alogenuri, ed anzi pei metalli bivalenti si ha formazione di composti ben definiti, come venne dimostrato da Plato [1] per i sali dei metalli alcalino-terrosi, e da me [2] per gli stessi sali di piombo. D'altra parte è ancor noto che in molti fluoruri complessi una parte del fluoro può essere sostituita da ossigeno.

Degli ossibromuri di piombo Pick ed Ahrens nel loro articolo sul piombo nell' Handbuch d. anorg. Chemie dell'Abegg [3] pongono come più probabili di esistenza i seguenti:

$$6\,PbO\,.\,PbBr_2 + 2\,H_2O\ (^4)$$
$$3\,PbO\,.\,PbBr_2 + {}^3/_4\,H_2O\ (^5)$$
$$2\,PbO\,.\,PbBr_2\ (^6)$$
$$PbO\,.\,PbBr_2\,.\,H_2O\ (^7).$$

Tanto l'ossido quanto il bromuro di piombo usati provenivano da Kahlbaum. Il punto di fusione del bromuro di piombo giace a 368°; quello dell'ossido a 892° secondo le mie esperienze, ed è in buon accordo con quello dato da Cooper, Shaw e Loomis [8] (888°), da Schenck e Rassbach [9] (882°), da Doeltz e Mostowitsch [10] (902°). Il punto di fusione dell'ossido di piombo estrapolato da Ruer è certamente troppo basso (830°).

Le miscele vennero fuse in crogiolo di platino ed in forno elettrico; venne usata una massa costante di trenta grammi.

Nella fusione delle miscele più ricche in ossido di piombo e dell'ossido di piombo stesso non venne osservata nessuna profonda alterazione del crogiuolo di platino, che venne segnalata da Ruer e che certamente era dovuta al fatto che l'ossido usato da questo sperimentatore conteneva piccole tracce di piombo libero.

La perdita in peso delle miscele non è forte per riscaldamento a 900° e venne attribuita a sublimazione del bromuro; di essa venne tenuto conto nella composizione finale della miscela.

Il sistema bromuro-ossido di piombo. — I dati relativi a questo sistema sono riuniti nella tabella I e nel diagramma a fig. 1.

(1) Zeit. f. phys. Chem., *58*, 350 (1907).
(2) Questi Rendiconti, *20*, 1° sem., 172, 233 (1911).
(3) Abegg's Handb. d. an. Chem., III, 2, pag. 663.
(4) Strömholm, Zeit. f. an. Chem., *38*, 429 (1904).
(5) Id. id.
(6) André, Comptes Rendus de l'Ac. de Sc., *96*, 435, 1502 (1884).
(7) » » » » » *97*, 1032 (1885).
(8) Ber. Chem. Ges., *42*, 3991 (1909).
(9) » » » *41*, 2918 (1907).
(10) Metallurgie, *4* (1907).

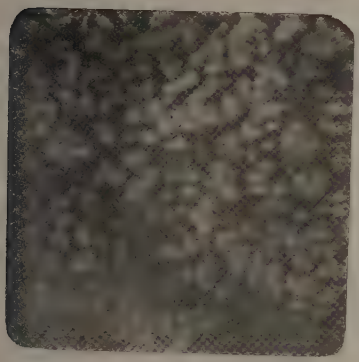


FIG. 1. — 95.81 mol. % $PbBr_2$

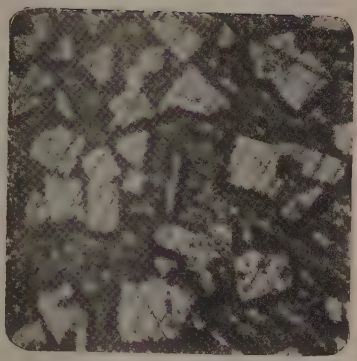


FIG. 2. — 77.57 mol. % $PbBr_2$

FIG. 3. — 37 mol. % $PbBr_2$

FIG. 4. — 21.96 mol. % $PbBr_2$

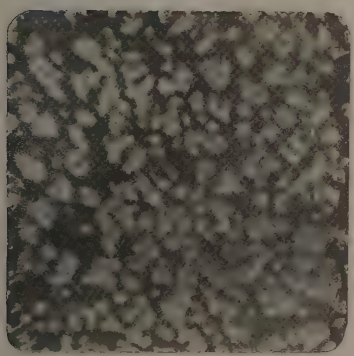


FIG. 5. — 68.47 mol. % PbF_2

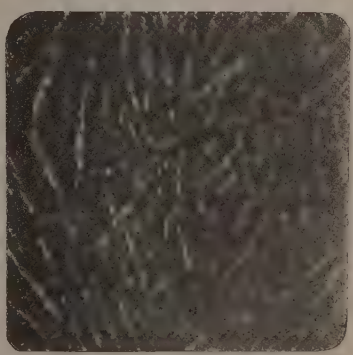


FIG. 6. — 27.98 mol. % PbF_2

Ingrandimento 75 diam.

La curva di deposizione primaria del bromuro di piombo discende dal punto di solidificazione di quest'ultimo ad un punto eutettico a 13 mol. % ca. di PbO e a 349°. Indi la curva di cristallizzazione primaria sale sino a 35 mol. % a 475°, ove si nota un evidentissimo gomito, per risalire poi sino ad un massimo a 712° e a 66,81 mol. % ca. di PbO e ridiscendere poi ad un punto eutettico a 700° e a 75 mol. % di ossido di piombo. Le miscele dall'ossido di piombo puro a 80 mol. % mostrano all'inizio di cristallizzazione un nuovo punto di arresto a 740° che pare abbia la sua massima durata nella miscela a 80 mol. Poscia la curva di deposizione primaria discende rapidamente al punto eutettico a 700°; questo arresto eutettico appare ancora alla miscela di 79,98; 83,91; 87,02 di ossido di piombo.

Dall'esame del diagramma completo risulta senza dubbio l'esistenza di due composti: uno decomponibile alla fusione ed uno che può fondere inalterato, che ha il massimo che gli spetta a 66,4 mol. % di ossido di piombo. Infatti tutte le miscele comprese da 35 a 66,4 mol. hanno nelle loro curve di raffreddamento oltre all'inizio di cristallizzazione un arresto alla temperatura costante di 475°. Alla miscela di 50 mol. % l'arresto eutettico a 349° scompare, e l'arresto a 475° ha la sua massima durata: ad essa certamente corrisponde un composto della composizione di una molecola di ossido per una di bromuro $PbBr_2 . PbO$.

La miscela a 66,81 cristallizza a temperatura praticamente costante. La sua composizione si scosta da quella di un composto di due molecole di ossido ed una di bromuro (ciò è dovuto al fatto che dopo fusione non si giunge mai esattamente alla composizione desiderata in causa della sublimazione del bromuro anche per aggiunte preventive di questo), tuttavia si può considerare assai prossima e praticamente corrispondente ad un composto $PbBr_2 . 2\,PbO$.

Le miscele più ricche in ossido solidificano frequentemente con forti sopraraffreddamenti, dimodochè il diagramma non risulta con sicurezza come per la parte precedente. Le durate di arresto a 741° non sono molto regolari: si ha inoltre l'anomalia del presentarsi della cristallizzazione eutettica alla concentrazione del supposto composto ed oltre, tuttavia dai fenomeni osservati pare potersi concludere che esso fonda con decomposizione, ed abbia la composizione $PbBr_2 . 4\,PbO$.

Di alcune miscele vennero eseguite alcune micrografie a luce riflessa. I masselli si prestano nomale ad essere levigati sia per la loro porosità, sia per la loro fragilità; tuttavia alcune micrografie risultarono ben caratteristiche. Il miglior mezzo d'attacco fu trovato essere l'acqua bollente. L'ingrandimento fu costantemente di 75 diametri. Nella tavola finale nella fig. 1 si vede chiaramente il deposito primario di $PbBr_2$ in massa eutettica, nella fig. 2 il deposito primario di $PbBr_2 . PbO$, nella fig. 3 quello di $PbBr_2 . 2\,PbO$ e nella fig. 4 il deposito primario di $PbBr_2 . 4\,PbO$.

TABELLA 1ª.

mol. % di Pb O	Temperature di cristallizzaz. primaria	Temperature di cristallizzaz. eutettiche	Durate in secondi	Temperature di formazione di $PbBr_2 . PbO$ e di $PbBr_2 . 4PbO$	Durate in secondi
0.00	368°	—	—	—	—
4.19	359	348°	90″	—	—
8.91	?	351	180	—	—
15.45	381	349	190	—	—
22 63	429	349	160	—	—
29.92	478	349	100	—	—
34.96	473	348	60	—	—
41.65	530	347	20	476°	120″
50.06	630	—	—	475	160
42.80	655	—	—	482	110
63.80	689	—	—	470	50
66.81	712	—	—	—	—
71.80	707	700	50	—	—
75.72	cut.	700	130	—	—
78.04	721	700	80	—	—
79.98	742	700	—		
83.91	?	700	—	742	
87.02	782	700	—	746	
91.05	799	—	—	740	
95 32	842	—	—	740	
100 00	892	—	—	—	—

Per miscele più ricche in PbO non potè essere preparato nessun campione dimostrativo.

Dei composti già noti e precedentemente citati viene quindi confermata l'esistenza di $PbBr_2 . PbO$ ad alta temperatura ed allo stato anidro, e di $PbBr_2 . 2PbO$. Inoltre si hanno pure dati per l'esistenza di un composto $PbBr_2 . 4PbO$ che non era noto precedentemente. Confrontando i risultati ottenuti con quelli già ottenuti da Ruer pel sistema $PbCl_2 . PbO$, si trova un'analogia quasi perfetta di comportamento del bromuro e del cloruro verso l'ossido: esistono cioè lo stesso numero di composti e dei medesimi tipi; tuttavia il composto $PbBr_2 . 4PbO$ fonde con decomposizione, a differenza del composto $PbCl_2 . 4PbO$, che fonde inalterato. Inoltre non venne notata formazione di soluzioni solide tra i varî ossibromuri.

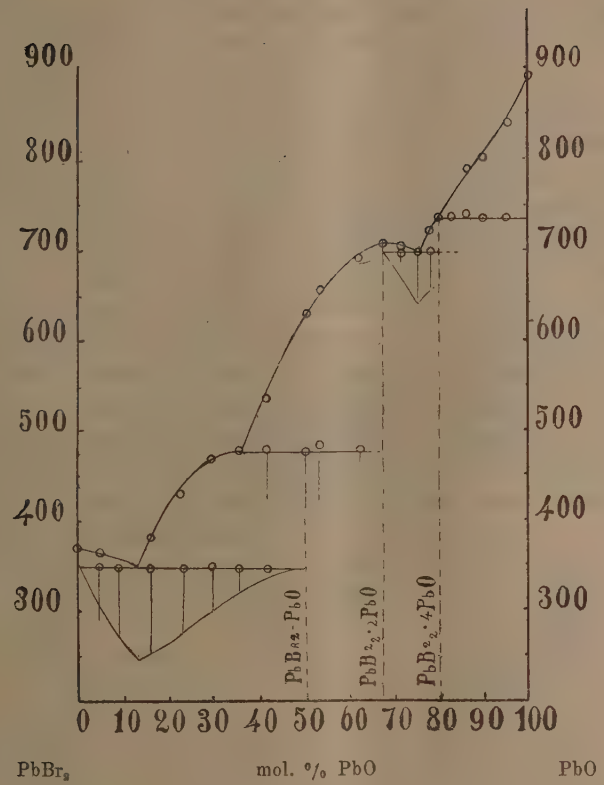


Fig. 1.

Il sistema fluoruro-ossido di piombo. — Il fluoruro di piombo fonde a 824°, come anche da mie esperienze precedenti (loc. cit.). La perdita in peso delle miscele riscaldate a 900° è quasi nulla, dimodochè non ne venne tenuto conto nella composizione delle miscele. I due componenti sono completamente solubili allo stato liquido, e non dànno luogo ad alcun composto tra di loro. La miscela eutettica giace a 494° e a 54 mol. % ca. di PbO. La deposizione primaria dell'ossido di piombo avviene con forti sopraraffreddamenti e la cristallizzazione eutettica non avvirne regolarmente, tuttavia dalle curve delle durate di quest'ultima, pare sia da escludersi la formazione di soluzioni solide.

TABELLA 2ª.

mol.% di PbO	Temperature di cristal izzaz. primaria	Temperature di cristallizzaz. eutettica	Durate in secondi
0.00	824°	—	—
5.00	800	483°	
11.00	755	485	60″
21.53	701	490	90
31.57	632	492	130
42.21	565	494	160
45.00	545	494	220
52.34	?	494	250
56.00	?	494	280
62.20	658	494	230
65.00	588	493	210
72.02	658	493	180
81.44	718	492	130
91.35	797	490	80
95.00	848	490	40
100.00	892	—	—

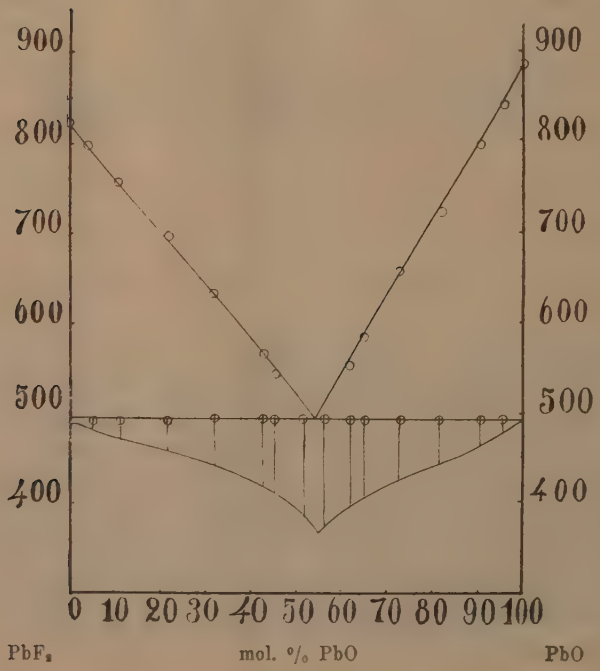


FIG. 2.

Anche di queste miscele vennero eseguite due micrografie una nel campo di deposizione del fluoruro ed una nel campo di deposizione dell'ossido. La fig. 5 mostra infatti il deposito primario bianco di fluoruro in massa eutettica grigia, e la fig. 6 il deposito primario bruno di fluoruro in massa eutettica biancastra.

L'ingrandimento fu costantemente di 75 diametri.

Il comportamento del bromuro verso l'ossido di piombo è il medesimo di quello del cloruro; i composti che si originano per fusione assai verosimilmente hanno la medesima composizione; tuttavia il composto col bromuro a maggior tenore di ossido fonde con decomposizione mentrechè il composto dello stesso tipo col cloruro fonde inalterato; inoltre la tendenza degli ossicloruri a dare cristalli misti tra loro non venne notata per gli ossibromuri.

Nel sistema fluoruro-ossido di piombo non si hanno dati per la esistenza di alcun composto, ma la formazione di un semplice eutettico. Questo comportamento può essere messo in accordo col fatto che il fluoruro stesso (vedi sopra) si combina col cloruro e col bromuro di piombo per dare composti di due tipi che si ripetono in quelli tra cloruri e bromuri coll'ossido, e precisamente quelli della composizione di una molecola di alogenuro per una molecola di ossido e di una molecola di alogenuro per quattro di ossido come risulta dal seguente raffranto:

$PbCl_2 . PbO$	$PbCl_2 . 2\,PbO$	$PbCl_2 . 4\,PbO$
$PbBr_2 . PbO$	$PbBr_2 . 2\,PbO$	$PbBr_2 . 4\,PbO$
$PbCl_2 . PbF_2$	—	$PbBr_2 . 4\,PbF_2$
$PbBr_2 . PbF_2$	—	$PbBr_2 . 4\,PbF_2$

e cioè nei composti dei tipi citati le molecole di fluoruro possono essere sostituite da molecole di ossido, fatto questo in accordo con quello già noto che in alcuni fluoruri doppi il fluoro può essere in parte sostituito da ossigeno.

Resta però da notare come, dato questo comportamento degli ossidi e dei fluoruri, non si abbia formazione di soluzioni solide.

Fisiologia vegetale. — *Sui rapporti tra l'azione di un' illuminazione istantanea a diversa distanza, e la reazione nei germogli di Vicia sativa.* Nota di Giulia Campanile, presentata dal Socio R. Pirotta (1).

Le ricerche compiute in questi ultimi anni intorno ai fenomeni eliotropici, furono spesso vòlte alla determinazione dei rapporti esistenti tra l'intensità luminosa provocante l'eccitazione, la durata della eccitazione medesima, e la conseguente reazione. Fu, ad esempio, enunciata la legge cosidetta della *quantità della eccitazione.* Secondo questa legge, la quantità della eccitazione sarebbe determinata dalla intensità e dalla durata di essa; questi due fattori poi, durata ed intensità, potrebbero variare senza produrre una differenza della reazione, purchè resti costante il loro prodotto, determinante la quantità medesima. L'esattezza di questa legge è stata discussa; ad ogni modo, questi studî stanno a dimostrare l'importanza del nuovo indirizzo dato a questo genere di ricerche.

Avendo io già sperimentato come ottimo materiale di studio i germogli della *Vicia sativa* (2), volli intraprendere, su questa pianta, ricerche intese a stabilire i rapporti esistenti tra intensità e durata di eccitazione da un lato, reazione dall'altro; in quest'ultima studiai particolarmente il tempo di latenza ed il movimento, più o meno accentuato, di curvatura. Prima di ogni altra cosa mi sembrò opportuno di ricercare il comportamento di questa pianta di fronte ad una illuminazione istantanea, agente a diverse distanze. Si comprende facilmente che per la medesima intensità luminosa, aumentando la distanza, la reazione deve gradatamente diminuire; ma, poichè la reazione stessa è un fenomeno complesso, nel quale può esser compresa non soltanto l'energia del curvamento ma ben anco il tempo che intercede tra l'eccitazione e l'inizio della reazione (tempo di latenza), credei opportuno di ricercare come si comportino questi due fattori per distanze sempre crescenti delle piantine dalla sorgente di luce istantanea. Per sorgente luminosa, analogamente a quanto è stato praticato da altri sperimentatori, fu adoperata una lampada a filamento metallico, della energia di 50 candele. Essa era posta alla estremità di un tavolino lungo quattro metri, la cui super-

(1) R. Istituto botanico di Roma.

(2) La *Vicia sativa*, come dirò in un lavoro di prossima pubblicazione, pure avendo nella lamina fogliare le cellule epidermiche foggiate a lente, e quindi atte alla recezione dello stimolo luminoso, presenta la sensibilità eliotropica limitata al solo fusticino; la reazione avviene nelle sole zone colpite; non v'è trasmissione di stimolo.

ficie era annerita; del pari annerite erano le pareti circostanti, perchè non si avessero a verificare riflessioni luminose che potessero turbare l'andamento dell'esperienza. Su detto tavolo si collocavano a distanze di metri 1, 2, 3, 4, taluni piccoli vasi contenenti piantine fatte germinare in modo che risultassero in una linea, disposta nelle mie esperienze, perpendicolarmente ai raggi luminosi. I vasi poi, alle singole distanze, erano posti alternati in modo da non ombreggiarsi a vicenda. La luce si faceva agire per circa un secondo di minuto; si poteva quindi considerare istantanea.

La reazione che ne seguiva avveniva in tempi diversi per le diverse distanze; l'osservazione però di detta reazione, e la determinazione esatta del suo inizio alle varie distanze, presentavano enormi difficoltà, data la grandissima sensibilità della *Vicia*.

Dovetti subito escludere il metodo delle osservazioni compiute, ad intervalli stabiliti, usufruendo di una debole sorgente luminosa, tanto debole da doversi abituare al buio prima di poter distinguere nettamente le piantine: anche una simile sorgente era sufficiente a turbare la reazione.

Ricorsi al metodo di toglier via, a regolari intervalli, due vasetti dalle singole distanze, osservarli fuori della camera buia, e quindi eliminarli. Oltre all'enorme sciupìo di materiale, questo secondo metodo presentava grandissimi inconvenienti, tra i quali non ultimo quello di qualche inevitabile urto alle piantine, data la perfetta oscurità; non potevo poi tener conto della grande differenza individuale pesentata dalla Veccia.

Dopo altri tentativi, mi decisi per una via un pò lunga ma molto esatta: quella cioè di rinnovare tutto il materiale ad ogni singola osservazione.

Cominciavo col lasciare al buio perfetto, per un $^1/_4$ d'ora dopo l'eccitazione luminosa, le piantine disposte alle varie distanze, ed osservavo quindi se aveva avuto luogo alcun movimento di reazione; successivamente, cambiato materiale, ripetevo l'esperienza nelle stesse condizioni ma lasciavo le piantine al buio per un tempo maggiore [$^1/_2$ ora]; infine in altre esperienze portavo questo tempo a $^3/_4$ d'ora, ad una ora; il tempo medesimo era poi prolungato di $^1/_2$ ora in $^1/_2$ ora, fino a 2 ore e $^1/_2$.

Ho potuto stabilire che la reazione non comincia, per nessuna distanza, ad un tempo di latenza inferiore ai $^3/_4$ d'ora.

Come si può osservare dal prospetto, con un tempo di latenza di tale durata, abbiamo il curvamento del 6 % . 5 % alle distanze rispettive di 1 metro, 2 metri; a 3 metri, 4 metri, nulla. Compiendo le osservazioni dopo 1 ora, aumenta per le distanze di 1 metro, 2 metri, la percentuale delle piantine curvate; si ha un inizio di reazione a tre metri (2 %); a 4 metri, ancora nulla. Le piantine poste a questa distanza, cominciano a reagire (2 %) soltanto dopo un'intervallo di 1 ora e $^1/_2$ dalla eccitazione luminosa. Come quella ad un'ora e $^1/_2$, l'osservazione a 2 ore, 2 ore e $^1/_2$ ci dà sempre lo stesso risultato: *aumento di percentuale;* si mantiene sempre evidentissima

la differenza tra il numero delle piantine curvate alle varie distanze: ad es., ad 1 metro, per il tempo di 2 ore $^1/_2$, abbiamo il curvamento del 58%; a 4 metri, per lo stesso tempo, abbiamo invece il 14%. L'energia del movimento di curvatura è sensibilmente identica, per tutte le distanze.

Il fenomeno procede con regolarità e permette di concludere, per la *Vicia sativa* almeno, che, aumentando la distanza dalla sorgente luminosa istantanea, *non varia sensibilmente l'intensità del curvamento; varia invece notevolmente la durata del tempo di latenza.*

Lasciando infine, dopo l'eccitazione luminosa, le piantine al buio per un tempo indeterminato (10 ore circa), come si vede dal prospetto, si è avuto il 100% del curvamento solo ad un metro e a 2 metri (93%). A tre metri e a 4 metri si è avuto rispettivamente l'82 e il 70 per cento.

Si avverta che le piantine di *Vicia* eran lasciate crescere in una cassa buia, e venivano usate per l'esperienza, appena raggiunta l'altezza di 3 cm., al massimo 3 cm. e $^1/_2$. La cassa era collocata nella stessa stanza, e le piantine venivano disposte sul tavolino usufruendo di una debolissima luce diffusa, tale da non provocare reazione apprezzabile, come fu sempre dimostrato dal risultato di tutte le esperienze. La luce doveva bastare semplicemente a far scorgere i vasetti sui quali un segnaccio bianco stava ad indicare la direzione della linea delle piantine.

Specchio delle esperienze a luce istantanea, compiute nella *Vicia sativa*.

Risultati ottenuti dopo:	1/2 ora		3/4 d'ora		1 ora		1 ora e 1/2		2 ore		2 ore e 1/2		10 ore	
	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate
Distanza m. 1 . . .	30	—	30	2	30	4	29	9	21	6	29	20	30	30
	20	—	25	1	20	2	10	9	26	19	17	6	20	20
	20	—	20	1	25	2	34	16	27	13	30	17	25	25
	30	—	25	2	25	2	27	11	26	14	24	15	25	25
	100	—	100	6	100	10	100	45	100	52	100	58	100	100
Distanza m. 2 . . .	20	—	30	2	20	1	21	2	31	4	18	11	28	28
	20	—	20	1	48	2	27	4	25	4	24	2	30	29
	20	—	25	0	32	1	30	6	26	8	25	5	20	19
	20	—	25	2			22	3	18	2	33	7	22	22
	20	—												
	100	—	100	5	100	4	100	15	100	18	100	25	100	98
Distanza m. 3 . . .	50	—	30	—	20	—	22	3	32	6	9	2	24	20
	20	—	30	—	48	1	33	5	32	7	31	7	29	22
	30	—	20	—	32	1	17	3	18	2	25	6	47	40
			20	—			28	5	18	2	35	7		
	100	—	100	—	100	2	100	16	100	17	100	22	100	82
Distanza m. 4 . . .	40	—	25	—	20	—	42	1	43	1	36	6	30	13
	40	—	20	—	25	—	6	0	42	1	20	3	35	28
	20	—	25	—	35	—	52	1	15	4	22	3	35	29
			30	—	20	—					22	2		
	100	—	100	—	100	—	100	2	100	6	100	14	100	70

Botanica. — *Sulla funzione delle radici contrattili.* Nota preventiva del dott. G. Catalano, presentata dal Socio A. Borzì.

La proprietà, che hanno molte radici, di contrarsi, è stata originariamente studiata da H. De Vries (1), e consiste, secondo le sue ricerche, in una particolare manifestazione dei fenomeni di tensione nei tessuti radicali, rivelandosi principalmente con la formazione di rughe alla superficie della radice, cioè in seno ai tessuti esterni della corteccia. Sotto l'influenza di un aumento di turgore, le cellule del parenchima corticale di queste radici, invece di dilatarsi in tutte le direzioni, si accorciano in direzione longitudinale e si allargano trasversalmente. Tutto ciò non è che un caso particolare, ma sostanzialmente non diverso dall'ordinario, dell'effetto della tensione cellulare, determinato da una grande differenza nella estensibilità della membrana cellulare secondo le diverse direzioni.

Nel 1897 il Rimbach (2) verificava sperimentalmente siffatta proprietà delle radici in ben 70 specie di piante appartenenti a 6 famiglie Monocotiledoni ed a 14 Dicotiledoni. Esempio massimo di contrattilità radicale, secondo l'A., offrono alcune Amarillidee, nelle quali l'accorciamento della radice, per un tratto di 5 mm., ammonta a ben il 70 %.

Dal punto di vista biologico, il Rimbach ritiene che la contrazione delle radici abbia lo scopo di portare le parti adulte del corpo vegetale dal punto ove si trovano, in altro punto, mediante l'attività di organi differenti dalle parti stesse soggette a spostarsi.

Il Massart (3), confermando siffatte osservazioni, dice che la produzione di radici contrattili avviene solo quando i fusti si trovano situati troppo vicini alla superficie del suolo. Perciò non può mettersi in dubbio che il fenomeno sia una reazione che la pianta esegue quando *se sent trop superficielle.* Rispetto alle cause determinanti, l'A. ritiene, in base ad esperienze appositamente istituite, che è il contrasto tra l'oscurità e la luce, e non la differenza di pressione e di umidità, *qui indique aux plantes, en voie de crois-*

(1) *Ueber die Contraction der Wurzeln,* Landwirtschaft. Jahrb., 9, 1880, pp. 37-80; *Over de contractie van wortels,* Versl. en Meded der Koninkl. Akad. van Wetenschapen, Afd. Nat., 2 reeks, 14 Dl., 1 Stuk, 1880, pp. 12-17.

(2) *Die kontraktilen Wurzeln und ihre Thätigkeit,* Beitr. z. wissenschaft. Botanik, Bd. II, Abth. I, 1897 (Ref. in Bot. Centralblatt, 1898, n. 20); *Ueber die Lebensweise des Arum maculatum,* Ber. der deutschen bot. Gesellschaft, Jahrg. XV, 1897, Heft 3, pag. 178 (Ref. in Bot. Centr., 1897, n. 27).

(3) *Comment les plants vivaces maintiennent leur niveau souterrain,* Bull. du Jardin Botanique de l'État à Bruxelles, vol I, fasc. IV, 1903.

sance, à quel moment elles sont encore dans le sol et à quel autre moment elles arrivent dans l'air », e che quindi determina la formazione delle radici contrattili.

Secondo il Daniel (1), invece, le radici contrattili del *Crocus* non sarebbero che un sistema compensatore transitorio di riserva alimentare che si sviluppa allorchè per una ragione qualunque, interna od esterna, la nutrizione generale della pianta si trova ostacolata. Siffatti apparecchi transitorii di compenso sono stati osservati anche dal Cavara (2) nella *Scilla bifolia*, che è una delle specie alle quali sono state attribuite radici contrattili. Alcuni esemplari di questa pianta, coltivati in vasetti ed abbandonati a sè stessi senza inaffiamento, o quasi, durante l'estate, sviluppavano radici tuberizzate, le quali, fungendo come serbatoi di acqua, rappresentavano uno speciale adattamento xerofilo, dovuto alle condizioni eccezionalmente avverse nelle quali le piante erano costrette a vivere.

Certamente, come osserva il Terracciano (3), in molte altre monocotiledoni la tuberificazione delle radici è del tutto normale, ed avviene quali che siano le condizioni climatiche e l'esaurimento del terreno; tuttavia, come si vede, è opportuno distinguere diversi casi nello studio delle radici contrattili quando si voglia riconoscere qual'è precisamente la loro funzione. Infatti, non sempre la contrazione ha l'effetto supposto, di far discendere i fusti nel terreno. Perchè ciò avvenga occorre il concorso di molti fattori, alcuni inerenti alle qualità delle radici stesse, altri a quelle dell'ambiente esterno. Infatti le radici, oltre che contrattili, debbono essere dritte e verticali, altrimenti l'accorciamento si disperderebbe lungo un decorso tortuoso; debbono essere fornite di peli radicali o, meglio, di numerose e sottili ramificazioni verso l'estremità inferiore, in modo che questa possa solidamente fissarsi nel terreno. Occorre, infine, che il cilindro assile, che rappresenta la regione più solida della radice, prenda parte anch'esso alla contrazione o, per lo meno possa seguire passivamente l'accorciamento del parenchima. Ora, siccome non sempre si trovano riuniti tutti questi caratteri in uno stesso caso, come non sempre le condizioni di mobilità dei fusti e la compattezza del suolo permettono la discesa dei fusti stessi, il Rimbach ha sentito la necessità di distinguere diverse forme di radici contrattili, a seconda che l'abbassamento dei fusti ha luogo realmente, o no. Così pure, non sempre la formazione di radici contrattili è un riflesso dipendente dallo stato di posizione

(1) *Sur les racines napiformes transitoires des Monocotilédones*, Revue de Botanique, III, 1891, pag. 455.

(2) *Un adattamento dei bulbi di « Scilla bifolia » alla xerofilia*, Boll. Soc. bot. it., 1911, pag. 96; id. *Tuberizzazione di radici secondarie in « Scilla bifolia »*, Boll. R. Orto Botanico di Napoli, III, pag. 453.

(3) *Sulle radici transitorie delle Monocotiledoni*, nei Rendiconti del Congresso botanico di Palermo, maggio 1902.

del corpo vegetale nel substrato. È stato inoltre dimostrato, come si rileva da quanto si è detto sopra, che formazioni analoghe, se non proprio le stesse radici contrattili, nella *Scilla bifolia* hanno ufficio ben diverso, cioè quello di servire da magazzini di riserva di acqua. Infine non appare ben dimostrato che i fenomeni esteriori (ossia, principalmente, la formazione di rughe alla superficie della corteccia, i quali servono a contrassegnare la caratteristica proprietà di siffatte radici) dipendano effettivamente da un processo di accorciamento delle radici od abbiano eventualmente tutt'altra origine. Io stesso ho avuto occasione di osservare da vicino la formazione delle dette caratteristiche rughe corticali nelle radici di una *Richardia africana*, cioè in una delle specie tipicamente descritte come dotate di radici contrattili, e tuttavia senza poter riscontrare in pari tempo nè un abbassamento del tubero, nè almeno un aumento dello stato di tensione delle radici stesse.

Nell'intendimento, quindi, di verificare quale parte spetti realmente al fenomeno della contrazione radicale nell'economia delle piante, e se si tratti di una funzione piuttosto complicata, come è sembrato fin'ora, ho voluto studiare dal punto di vista istologico alcuni tipici casi di radici contrattili. Mi limito qui ad esporre quanto ho potuto rilevare sulla detta specie di *Richardia*, la cui considerazione ha una particolare importanza, appartenendo essa ad una famiglia, nella quale il fenomeno in parola è largamente diffuso e caratteristico.

La struttura della corteccia radicale in questa pianta è contraddistinta dalla grande regolarità della disposizione delle cellule, in serie radiali e strati concentrici, ciascuno dei quali ne contiene presso a poco un egual numero. La stessa regolarità si riscontra nelle radici delle *Alocasie*, secondo van Tieghem (1). Tuttavia, come in queste ultime piante, anche nella *Richardia* gli ultimi 5-6 strati sono costituiti da cellule più piccole, di forma poliedrica, e non regolarmente seriate con le altre più interne, ma digradanti insensibilmente verso di esse. Cosicchè tutta la corteccia può dividersi in due regioni: l'una esterna, di 5-6 strati, coi caratteri detti, oltre l'epidermide e uno strato ipodermico; e l'altra interna, fatta di cellule rotonde in sezione trasversale e regolarmente succedentisi in serie radiali.

Queste ultime cellule, le quali costituiscono la principale massa del corpo corticale della radice, hanno la proprietà di contrarsi non appena assorbono acqua dall'esterno, come si può agevolmente verificare in sezioni longitudinali non molto sottili, messe in acqua distillata. Ora, perchè questa facoltà, che hanno le cellule di contrarsi sotto l'influenza di un aumento di turgore, abbia il supposto effetto di far accorciare la radice (e quindi di produrre l'abbassamento dei fusti), occorre naturalmente che la contrazione stessa

(1) *Recherches sur la structure des Aroidées*, Annal. des sciences naturelles, V série, Botanique, VI, 1866, pp. 72-210.

possa divenire permanente, che cioè le cellule possano fissarsi nella forma che assumono quando aumentano di turgore. Ciò non può aver luogo se non per mezzo dell'accrescimento. Questo, cioè l'ingrandimento delle cellule, dovrebbe procedere in modo che esse possano raggiungere forma e dimensioni definitive, imposte dalle particolari qualità fisiche delle loro membrane, ossia seguendo la tendenza, che hanno queste ultime a dilatarsi trasversalmente ed accorciarsi longitudinalmente.

Senonchè, l'osservazione della lunghezza definitiva che assumono queste cellule in confronto a quella che hanno mentre sono in via di accrescimento, porta a concludere che tutto ciò non si verifica, e che l'accrescimento stesso mette invece capo, come nei casi normali, ad un allungamento ed allargamento uniformi delle singole cellule. Infatti, in una lunga radice di *Richardia africana*, provvista già, nella sua porzione superiore, delle caratteristiche rughe, la lunghezza delle cellule corticali va gradatamente crescendo a partire dall'estremità inferiore apicale, fino a raggiungere, nella zona provvista di rughe (nella quale cioè, secondo gli autori, sarebbe avvenuta la contrazione), una lunghezza doppia o tripla di quella delle cellule corrispondenti nelle porzioni inferiori. Ciò specialmente si osserva nelle cellule più esterne della regione interna, vale a dire in quelle che occupano una posizione intermedia rispetto a tutta la massa del parenchina corticale, e che, secondo gli autori, sarebbero precipuamente impegnate nel fenomeno della contrazione. Al tempo stesso, esse acquistano grande ampiezza trasversale; ma ciò in nessun modo potrebbe portare ad una contrazione dell'intero tessuto, se in pari tempo non si verificasse una diminuzione della lunghezza, rispetto a quella che esse hanno quando sono ancora giovani ed in via di crescita. Questo accrescimento radiale, che maggiormente si verifica nelle cellule immediatamente in contatto col cilindro assile, per via della mutua compressione alla quale sono soggette in tal punto della corteccia, è invece causa, per quanto indiretta, della formazione delle rughe, in seno al tessuto che costituisce la regione esterna della corteccia. Le cellule di quest'ultima (ad eccezione di quelle dell'epidermide e dell'ipoderma), a differenza delle altre, possono segmentarsi ed aumentare di numero, seguendo in tal modo, di pari passo, l'aumento dello spessore della radice, che si compie, come si è detto, per incremento di volume delle singole cellule interne. Di queste ultime, quelle situate immediatamente al di sotto della detta regione esterna capace di segmentarsi sono naturalmente sollecitate a stirarsi lateralmente secondo la direzione del perimetro; e quando quest'ultimo comincia ad essere troppo grande, rispetto alla possibilità, che dette cellule hanno di ricoprirlo, esse, non potendosi segmentare, nè seguire in altro modo un ulteriore aumento della periferia, sono costrette a staccarsi l'una dall'altra. Allora perdono il turgore; le pareti vengono in contatto fra loro, ed in ultimo avvizziscono completamente, così che nei tratti corrispondenti delle serie radiali di cellule si ori-

gina un vuoto, in cui rimangono i residui delle pareti cellulari avvicinate tra loro ed in parte disciolte. Questi vuoti, dapprima si alternano con tratti di serie cellulari ancora intatti; ma infine anche questi si dissolvono, ed il vuoto diventa continuo. La zona esterna (con l'epidermide e l'ipoderma), la quale intanto si è accresciuta per segmentazione, perde, così, ogni appoggio al dì sotto di sè e diventa una sorta di involucro indipendente, troppo ampio rispetto al perimetro che l'accrescimento subìto l'avrebbe fatta capace di rivestire. Così si originano le rughe o crespe trasversali, caratteristiche della porzione superiore di queste radici, e che sono state attribuite a contrattilità; ma, come si vede, la loro formazione è un effetto indiretto, puramente materiale, dell'accrescimento, combinato con le particolari condizioni di struttura delle varie regioni della radice, e non già della contrazione del tessuto parenchimatico.

Per tal modo il fenomeno della contrattilità cellulare, dovuto alle variazioni di turgore, non può che produrre una semplice *fluttuazione* dello stato di tensione delle radici giovani, a seconda delle condizioni di maggiore o minore turgore in cui vengono a trovarsi volta a volta le cellule per effetto delle condizioni di umidità o di secchezza esterne. Ora questo processo, come si comprende di leggieri, non può produrre alcun notevole abbassamento dei fusti. Queste variazioni di tensione hanno anzi luogo in tutte le radici della stessa pianta, cioè anche in quelle le quali, per non avere le caratteristiche rughe, non sono considerate come contrattili. Tuttavia resta da chiarire il fatto che la formazione delle radici contrattili (rugose) ha luogo quando i fusti sono troppo superficiali, e cessa quando essi si trovano alla profondità giusta; in altri termini, si tratta di studiare l'influenza che gli agenti esterni esercitano sull'accrescimento delle radici, quando esse si trovano direttamente esposte alla loro azione.

A questo riguardo, maggior fondamento acquista l'opinione espressa dal Daniel e confermata dal Cavara in un caso tipico di piante a radici tiranti: che cioè a queste ultime spetti invece una funzione acquifera, sia pure di carattere transitorio, o come risultato di un adattamento.

Infatti, la stessa proprietà di contrarsi che hanno le cellule sotto l'influenza di un aumento di turgore, non esclude siffatta funzione, ma anzi ricorda le proprietà di alcune cellule tipicamente acquifere, quali, ad es., quelle dei così detti « veli radicali » delle radici aeree delle stesse Aroidee. La grande facilità con la quale le cellule contrattili assorbono l'acqua e s'inturgidiscono; la presenza di areole nelle membrane, le quali permettono rapidi e facili scambî di quest'acqua tra cellula e cellula, e la notevole capacità che acquistano allo stato adulto le cellule stesse per effetto dell'accrescimento, le fanno particolarmente adatte a compiere la funzione acquifera, per cui l'intero tratto della radice che si ingrossa assume il carattere di un vero serbatoio d'acqua, cui la regione corticale esterna, per i particolari carat-

teri istologici dell'epidermide e dell' ipoderma, fa da mantello protettivo molto efficace.

Ma oltre a ciò numerose osservazioni sul comportamento di queste radici, sull'epoca in cui si producono, e sul loro destino finale, provano indubbiamente che la funzione loro spettante è quella accennata. Il fatto che esse acquistano uno sviluppo considerevole quando le piante sono situate troppo superficialmente, è in evidente rispondenza con le condizioni di maggior secchezza in cui si trovano esposti in tal caso i fusti e, quindi, le piante stesse. Nella *Richardia africana*, che prospera coi tuberi sommersi completamente nell'acqua, le radici raggiungono il massimo sviluppo solo quando il livello ordinario dell'acqua si abbassa fino a scoprire le parti da cui sorgono. Epperò la formazione delle rughe (che dipende, come abbiamo visto, dalla cessazione dello stato di turgore delle cellule per effetto dell'accrescimento, e quindi, dal costituirsi di ampie lacune alla periferia della regione interna della radice) corrisponde esattamente allo stato di esaurimento delle riserve idriche delle radici. Il che ha luogo naturalmente quando esse hanno raggiunto il massimo dell'accrescimento in volume, e perduri il loro stato di scoprimento dal terreno o dall'acqua. L'apparizione delle rughe è quindi connessa con la durata della esposizione alla secchezza delle parti inferiori della pianta, giacchè in tali condizioni avviene precisamente l'impiego e l'esaurimento delle riserve liquide delle radici. Se invece le radici scoperte della *Richardia africana*, dopo divenute flosce e rugose, si fanno coprire novamente da uno strato d'acqua, non tardano ad imputridire.

Tutto ciò spiega perchè le radici si *contraggono* quando si trovano allo scoperto, e rimangono lisce e sottili quando i fusti, da cui sorgono, sono convenientemente approfonditi.

Le suddette considerazioni acquistano poi maggior valore dal fatto che le radici, cui è stato attribuito l'ufficio di tirar giù i fusti, si ritrovano per eccellenza in piante terrestri a fusti sotterranei. Queste piante cominciano a vegetare nella stagione umida, ed ingrossano gradatamente le loro radici durante il periodo vegetativo, immagazzinando nei loro tessuti una certa quantità di acqua; e soltanto sul finire del periodo vegetativo, quando cioè si è già nella stagione secca, appaiono in queste radici le caratteristiche rughe nella corteccia. Così avviene, per es., nei *Crocus* [1], nell'*Arum maculatum*, ed anche in qualche Dicotiledone, come nella *Ficaria ranunculoides*, secondo osservazioni del prof. Borzì.

A questo riguardo daremo maggiori dettagli in un prossimo lavoro *in extenso*; intanto, dall'esempio descritto si può concludere che ai fenomeni di contrazione radicale non spetta se non il significato derivante dalla loro natura

[1] Goebel, *Organographie der Pflanzen*, pag. 473.

prettamente fisica, già stabilita dalle chiare ricerche del De Vries. Essi, da soli, non bastano alla funzione del mantenimento del livello sotterraneo dei fusti, la quale assai più efficacemente si compie per attività incrementale dei fusti stessi, ossia con veri e proprî tropismi, come è stato illustrato nello stesso lavoro del Massart, di cui ci siamo in parte occupati.

Fisiologia. — *L'azione del radio nello sviluppo primaverile delle uova del baco da seta.* Nota di C. Acqua, presentata dal Socio R. Pirotta.

Lo studio dell'azione del radio sullo sviluppo delle uova in diverse forme di animali è stato oggetto di parecchie ricerche, le quali hanno dato in genere risultato positivo, nel senso di accertare un'azione del radio stesso, quantunque possa esplicarsi nei singolari casi in diversa maniera. Come fatto generale si ha la constatazione di un arresto o di un ritardo provocato dal radio nelle uova già fecondate, e di una alterazione indotta nella costituzione dei nuclei. Particolarmente interessanti sono le ricerche della scuola di O. Hertwig, che mettono in evidenza l'azione del radio stesso, facendolo anche agire negli elementi sessuali prima della fecondazione. Naturalmente in questa Nota non m'è possibile entrare nella estesa letteratura. Accennerò soltanto al fatto, più volte constatato, che l'azione del radio si manifesta differentemente secondo che agisce in diversi stadi di sviluppo, che detta azione non è uguale su tutti i tessuti, e che si esplica anche dopo un periodo di latenza. Fu accennato anche alla possibilità di un'azione acceleratrice, la quale però non sembra confermata. Chi volesse con qualche dettaglio conoscere l'argomento può consultare i lavori recenti di Hertwig G. e P. (1) e il lavoro, anch'esso recente, del Vernoni G., (2) nei quali è anche estesamente citata la letteratura.

Nel campo della bacologia citerò il lavoro di P. Tomaselli (3), nel quale l'Autrice, dopo avere sperimentato su larve del B. Mori, su crisalidi, su farfalle e su seme-bachi, giunge a concludere che il radio, limitatamente alle esperienze eseguite, si mostrò inattivo affatto nel campo della bacologia. Tuttavia l'argomento, come opportunamente è osservato in detto lavoro, non può ritenersi esaurito, ed è perciò che io ho creduto ripren-

(1) Hertwig G., *Parthenogenesis bei Wirbeltieren hervorgerufen durch artfremden radiumbestrahlten Samen*; Hertwig P. *Das Verhalten des mit Radium bestrahlten Spermacromatins im Froschei.* Archivi für mikroskopische Anatomie, 1913.

(2) Vernoni G., *Studi di embriologia sperimentale.* (*L'azione del radio sull'uovo di pollo*). Archiv für Entwicklungsmecanik der Orgonismen, 1911.

(3) Tomaselli P., *Esercita il radio nessuna influenza sulle manifestazioni della Séricaria Mori?* Annuario della R. stazione bacologica di Padova, vol. XXXVI, 1909.

derne lo studio, limitandolo in queste prime ricerche all'azione sullo sviluppo delle uova durante il periodo primaverile. Usai all'uopo due campioni di radio; l'uno, che già a me servì per esperienze nel campo della fisiologia vegetale, è del tipo così detto a sali incollati; cioè a dire il sale di radio, finissimamente suddiviso, è trattenuto da un mastice speciale, il quale permette di fare agire il radio stesso direttamente, senza il bisogno di schermi atti a trattenerlo.

Il dischetto con il preparato di radio è calcolato dall'attività di 100.000 unità. L'altro campione, costituito da una quantità considerevole di bromuro di radio (5 milligrammi), è contenuto in una scatolina ricoperta di una sottile laminetta di mica. Detto campione mi fu prestato cortesemente per queste esperienze dal Sen. Prof. B. Grassi, al quale mi è doveroso esprimere i miei ringraziamenti. Designerò il primo campione con la lettera A, il secondo con la lettera B.

La prima esperienza fu compiuta con il radio A.

Due piccoli lotti di seme bachi, di qualità gialla indigena, del peso ciascuno di gr. 0,2 furono posti entro due cellette scavate in due dischi di sughero ed aventi al fondo uno strato di garza. Un lotto era a contatto direttamente col disco radioattivo, dal quale era separato soltanto dalla garza; l'altro lotto era posto alla distanza di circa mezzo metro nella stessa stanza, ed era isolato dal disco radioattivo da un blocco di piombo di tre centimetri di spessore; questo lotto costituiva il controllo. L'esperienza ebbe principio il giorno 7 aprile; la temperatura dell'ambiente si mantenne di circa 18° C.

Dopo 5 giorni, cioè il 12 aprile, furono tolte dal lotto sottoposte a radiazione 20 uova, ed altrettante ne furono parimenti tolte il 19 aprile, cioè dopo 12 giorni. Il 24 e il 25 aprile nel lotto di controllo cominciò ad aversi qualche nascita isolata; nel 26-27-28 le nascite proseguirono e furono complete. Nei lotti radiati non si verificò nessuna nascita, nè si ebbe traccia dello sbianchimento del seme, il quale suole precedere le nascite stesse. Si conservarono questi lotti per oltre 20 giorni, rimasti sempre completamente inattivi, e in seguito si gettarono. Da questa prima esperienza risulta: 1° che il preparato di radio dell'attività di 100.000 unità è sufficiente ad arrestare ogni sviluppo; 2° che un'esposizione di 5 giorni è bastante per ottenere effetti completi.

In una seconda esperienza, iniziata il 28 aprile, fu del pari adoperato il radio A. Furono impiegati parimenti due lotti c. s. e nelle condizioni già descritte. La temperatura media fu di circa 20° C. Dopo 10 giorni, cioè a dire l'8 maggio, cominciarono le nascite; ciò dipese dal fatto che il seme adoperato per le esperienze era stato già tolto da parecchi giorni dalla frigorifera e si trovava quindi in stato già avanzato di incubazione. Nei giorni 9-10-11 le nascite nel controllo furono complete, ma si constatò con sor-

presa che anche nel lotto radiato si avevano nascite, e cioè: 1 nel 9 maggio, nessuna nel 10, 11 nel giorno 11, 8 nel giorno 12, 12 nel giorno 13, altre 3 nei giorni successivi, in totale 35 nascite su circa 270 ovuli che costituivano il lotto. In questo caso adunque l'arresto dello sviluppo non era stato completo dopo 10 giorni, e ciò in opposizione a quanto si era verificato nella prima esperienza, nella quale erano bastati 5 e 7 giorni per provocare l'azione completa. Sorgeva dunque il dubbio in accordo a quanto, come si è detto, era stato descritto in altri casi, che il periodo evolutivo nel quale agisce il radio (poichè nella seconda esperienza le uova erano più prossime al loro schiudimento) non fosse senza influenza. Occorrevano quindi ulteriori ricerche.

Le nuove esperienze furono fatte con il radio A, e con il radio B, e si iniziarono il 21 maggio con seme giallo indigeno, il quale era stato tolto dalla frigorifera da alcuni giorni. Furono fatti sette lotti da gr. 0,2 l'uno, contenenti circa 270 ovuli per ciascuno.

Uno di tali lotti serviva da controllo; gli altri erano utilizzati come appresso. Due lotti *a*, *b* furono sottoposti all'azione del radio A, per quattro giorni e mezzo ciascuno, ma in periodi diversi, e cioè *a* nel periodo dal 21 al 26, *b* dal 26 al 31. Mentre l'uno di tali lotti era sottoposto all'azione del radio, l'altro era mantenuto alla stessa temperatura, ma in condizioni ordinarie; così ciascun lotto era radiato per uno stesso tempo (giorni 4 $^1/_2$), ma in periodi differenti. Altri due lotti *c*, *d*, erano sottoposti all'azione del radio B nelle stesse condizioni come sopra.

Gli ultimi due lotti *e*, *f*, erano sottoposti all'azione del medesimo radio B, ma alla distanza di un centimetro, entro una scatolina di sughero, col fondo di garza ed erano parimenti radiati per quattro giorni e mezzo, ma in periodi differenti come fu detto. La temperatura si mantenne ad una media di 21° C. Le nascite cominciarono il 3 giugno e si ebbero i risultati trascritti nel seguente prospetto:

DATA Giugno	Radio A a diretto contatto		Radio B a diretto contatto		Radio B a 1 cent. di distanza		Controllo
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	—
	giorni 4 ½ dal 21 al 26	giorni 4 ½ dal 26 al 31	giorni 4 ½ dal 21 al 26	giorni 4 ½ dal 26 al 31	giorni 4 ½ dal 21 al 26	giorni 4 ½ dal 26 al 31	—
	— Nascite	— Nascite	— Nascite	— Nascite	— Nascite	— Nascite	Nascite
3	2	1	1	1	1	1	5
4	9	26	10	7	14	50	87
5	5	44	5	27	32	114	128
6	3	36	3	17	3	63	35
7	8	36	3	14	15	29	6
8	2	18	1	3	4	8	4
9	1	9	1	3	2	2	—
10	3	9	—	1	1	—	—
11	—	4	1	—	1	1	—
12	—	—	—	—	—	—	—
13			1	1	1		
Totale	33	183	26	74	74	268	265

I risultati di tali esperienze sono visibili a colpo d'occhio. In *a* abbiamo 33 nascite, in *b* 183; eppure ambedue i lotti risentirono l'azione del radio nelle stesse condizioni, fatta soltanto eccezione per il tempo, che per *b* fu in un periodo posteriore all'altro.

Ciò ha bastato a dare una differenza notevolissima. Lo stesso dicasi per i lotti *c* e *d*, sottoposti all'azione del radio B, a contatto diretto, che ci presentano rispettivamente le nascite espresse dai numeri 26, 74. Gli ultimi due lotti *e*, *f* sono sottoposti all'azione dello stesso radio B, ma non più a contatto diretto, bensì alla distanza di un centimetro. Orbene mentre *f* dà nascite complete e si distingue dal controllo soltanto per presentarle un po' prolungate, come accade sempre quando il seme non ha subìto un'incubazione regolare, *e* invece non dà che nascite parziali. Analogamente tutti i lotti radiati danno nascite alquanto irregolari e prolungate.

La conclusione di tali esperienze è adunque evidente. *L'azione del radio è diversa secondo che agisce in periodi differenti di evoluzione delle uova; nelle mie esperienze fu maggiore quando il seme era più lontano dal suo*

schiudimento e minore quando il seme stesso era più vicino a detto periodo.

Ora prendiamo in esame un'altra quistione. Facendo agire il radio ad una distanza determinata, per modo che non ne risultino conseguenze nocive, si potrà pure avere una qualche differenza, rispetto al controllo, per ciò che riguarda l'epoca e la durata del periodo di schiudimento? A questa domanda già in parte si risponde con un esame di quanto accadde nella precedente esperienza con il lotto *f*, il quale non mostrò comportamento differente dal controllo, fatta eccezione per un lieve prolungamento del periodo di schiudimento. Ma altre prove furono condotte durante la seconda esperienza, sopra descritta. Mentre il primo disco di sughero conteneva nella sua celletta col fondo di garza il piccolo lotto che si trovava a contatto diretto con il preparato radifero, altri tre dischi parimenti di sughero contenenti seme-bachi, nelle stesse condizioni e quantità, erano sovrapposti al preparato stesso alle distanze di cm. 3, 6, 9. In questi lotti la radiazione giungeva molto affievolita per la distanza maggiore ad ogni lotto, ed anche per il fatto che essa doveva attraversare gli strati di seme-bachi dei lotti sottostanti. Poteva dunque sembrare interessante il ricercare l'azione di una debole radiazione. Ma questa non produsse allora effetto apprezzabile; lo schiudimento delle uova avvenne in modo del tutto uguale a quello presentato dal lotto di controllo.

Concludendo adunque, l'azione diretta del radio, se debole, non produce — nelle condizioni delle mie esperienze — alcun effetto apprezzabile, se forte arresta l'evoluzione delle uova, ma quest'arresto è in rapporto con il periodo di tempo, durante il quale il radio ha agito, e cioè nei lotti radiati in un periodo più lontano dall'epoca dello schiudimento, l'azione è di molto maggiore di quella esercitata in un periodo posteriore, cioè a dire più vicino al momento dello schiudimento stesso. Questi primi risultati debbono dare origine a nuovi studî intesi a stabilire con maggiore esattezza i rapporti che passano tra l'azione del radio e il periodo evolutivo, e cioè lo stadio di sviluppo organico e delle differenziazioni corrispondenti ad esso sviluppo. Intanto m'è sembrato non privo d'interesse il rendere noti questi primi risultati ottenuti.

Parassitologia. — *Osservazioni e ricerche sulle tignuole della vite.* Nota del dott. M. Topi, presentata dal Socio B. Grassi.

I.

Sono riunite in questa Nota osservazioni e ricerche sull'incrisalidamento invernale delle larve delle tignuole della vite [*Conchylis ambiguella*, *Polychrosis* (*Eudemis*) *botrana*], che, saltuariamente, ho avuto occasione di fare nell'alto Monferrato, e precisamente nel territorio di Alice Bel Colle; in alcune, come sarà espressamente indicato, ho avuto la collaborazione di F. Monticelli.

* * *

La determinazione dei rifugî invernali dove, in aperta campagna, le larve delle ultime generazioni di *Conchylis* e di *Eudemis* vanno ad incrisalidarsi, ha molta importanza nel campo pratico per la lotta contro le due tignuole; nè, a questo proposito, possiamo usufruire delle numerose osservazioni ed esperienze francesi, perchè nei nostri sistemi di palatura della vite entra un elemento nuovo, la canna, la quale, al contrario di ciò che avviene coi pali, offre, con l'internodio superiore aperto, un ricercato rifugio alle larve che s'incrisàlidano.

Salvo poche vigne condotte su fil di ferro, in cui le canne entrano in minor quantità, il modo qui più usato di impalatura della vite è di mettere un fascio di canne lungo il ceppo ed a cui questo è legato; ad altri due fascetti di canne, poi, situati a monte o a valle, si affida il tralcio a frutto; cosicchè per ogni vite occorrono da 6 a 12 canne, a seconda delle loro dimensioni. Naturalmente, nè tutte le canne sono tagliate superiormente nè lo sono in guisa da lasciare un pezzo d'internodio; quindi non tutte le canne possono ivi dar ricetto a larve, e, d'altra parte, la canna non offre altro rifugio. Le viti sono tenute alte e ciascuna pianta ha dai 60 cm. ad 1 m. di legno vecchio, fra le cui corteccie si incrisalidano pure le larve di *Conchylis* e di *Eudemis*.

Per la lotta invernale contro questi parassiti si possono quindi consigliare e si consigliano: lo scortecciamento dei ceppi e lo spuntamento delle canne, con relativa distruzione delle parti asportate (l'aspersione dei ceppi con acqua bollente o caldissima è specialmente efficace contro la sola *pirale*).

Lo scortecciamento dei ceppi, data la loro lunghezza, che rende laboriosa e non agevole l'operazione, ed i pericoli a cui, per la rigidità degli

inverni nelle regioni settentrionali, si deve andare incontro, riteniamo non possa praticamente adottarsi. Ci è sembrato quindi interessante il determinare quale sarebbe la presumibile efficacia dello spuntamento delle canne, che è operazione facile, economica, che non troverebbe, in pratica, altra difficoltà che la cattiva volontà e il misoneismo di increduli vignaiuoli (1).

Per accertarsi dunque dell'efficacia dello spuntamento delle canne, era necessario vedere in quale misura le larve di *Eudemis* e di *Conchylis* si dirigessero, per incrisalidarsi, alle punte delle canne ed in quale alle corteccie. Se, infatti, la maggior parte delle larve incrisalidasse nelle canne, l'efficacia dello spuntamento sarebbe massima; minima, invece, se vi si trovasse soltanto una piccola percentuale di crisalidi.

In una vigna, molto danneggiata dalle tignuole, vennero adunque, d'inverno, scortecciate 25 viti, ricercandovi le crisalidi, ed al tempo stesso vennero esaminate, col medesimo scopo, tutte le canne che ne costituivano l'impalatura. I risultati furono i seguenti:

VITE	Crisalidi rinvenute		VITE	Crisalidi rinvenute		VITE	Crisalidi rinvenute	
	nelle canne	sotto la corteccia		nelle canne	sotto la corteccia		nelle canne	sotto la corteccia
I	0	0	X	3	2	XIX	0	0
II	1	0	XI	2	0	XX	0	1
III	0	1	XII	0	0	XXI	0	0
IV	0	1	XIII	0	2	XXII	0	1
V	0	0	XIV	0	1	XXIII	1	0
VI	6	5	XV	1	0	XXIV	0	0
VII	3	2	XVI	1	0	XV	1	1
VIII	0	1	XVII	0	0			
IX	0	0	XVIII	0	0	Totali	19	18

Il numero rilevante, almeno per le località prese in esame e per le annate cui si riferiscono queste ricerche, delle crisalidi rinvenute (2), testi-

(1) In vista, anzi, di queste difficoltà, si è anche consigliata l'adozione, per la palatura delle vigne, di sostegni lisci, non offrenti cioè rifugi alle larve per incrisalidarsi. Ma è evidente che, quando anche la cosa fosse possibile e pratica, le larve si dirigerebbero totalmente verso i ceppi, dove più difficile ne è la distruzione; di più, siccome le canne occorre siano frequentemente rinnovate, almeno per quella parte che viene distrutta avanti la primavera, si ha una, diremo così, automatica distruzione dei parassiti.

(2) Il dott. Maisonneuve, nel 1910, avendo proceduto allo scortecciamento di un certo numero di ceppi nell'Anjou (dove le viti sono, come nella nostra località, circa 4000 per ettaro) ottenne, come media, 2 crisalidi ogni 10 ceppi. L'anno successivo, l'invasione delle tignuole vi fu formidabile. Il numero delle crisalidi che si rinvengono è in rapporto con la gravità dell'infezione dell'annata; ma la loro scarsità od abbondanza non sono affatto indizio di debole o forte invasione di tignuole nell'annata successiva.

monia della gravità dell'infezione nella vigna in esperimento. Infatti, ricerche contemporanee e successive, eseguite in altre località del medesimo territorio, separatamente sui ceppi e nelle canne, ci hanno fatto riscontrare un grande numero di ceppi e di canne privi di crisalidi.

È notevole il fatto che, osservando superficialmente, si tenderebbe ad ammettere che nelle punte delle canne si trovasse la quasi totalità delle crisalidi. Ciò dipende, riteniamo, dalla maggiore facilità con cui si possono esaminare le canne, dove si notano, talvolta, riuniti in un solo internodio, fino a 10 bozzoletti con crisalidi (Monticelli); mentre la ricerca sotto le corteccie riesce lunga e penosa. Ma le ricerche sopra esposte ed altre, che citeremo in appresso, dimostrano che vi ha per lo meno un egual numero di crisalidi nelle canne e sotto le corteccie. Si deve anche notare che sulle viti dove le crisalidi abbondano, si trovano numerose tanto nelle canne quanto nelle corteccie (viti VI, VII e X).

Da quanto abbiamo riferito devesi adunque concludere che con lo spuntamento annuale delle canne verrebbesi a distruggere circa la metà delle farfalle che si schiuderebbero la primavera successiva. Vale a dire — tenendo anche conto della necessità che la pratica debba esser generale e della difficoltà di ottenerlo — che il *solo* spuntamento delle canne, non associato cioè ad altri mezzi di lotta, difficilmente potrebbe dare risultati ben apprezzabili ed evidenti.

Si otterrebbero invece risultati più completi con un altro metodo di lotta invernale: quello dei rifugî artificiali, fra cui, molto consigliabili, quelli descritti ed applicati da G. Catoni nel Trentino. Si tratta di applicare, alla base del tralcio e sul legno di due anni, delle fasce di stoffa, ove le larve incrisalidano e dove quindi le crisalidi possono facilmente distruggersi. Nel caso nostro, all'applicazione delle fasce dovrebbe associarsi lo spuntamento delle canne, oppure le fasce dovrebbero applicarsi così ai ceppi come alle canne. È quanto ha fatto, in via sperimentale, F. Monticelli, ottenendo una conferma dei risultati esposti nella tabella precedente:

Sulle canne		Sui ceppi	
Fasce applicate	n. 26	Fasce applicate	n. 32
» senza bozzoletti . .	» 14	» senza bozzoletti . .	» 11
Bozzoletti con crisalidi . .	» 23	Bozzoletti con crisalidi . .	» 36
Bozzoletti vuoti	» 6	» vuoti	» 8
Crisalidi vuote	» 4	Crisalidi vuote	» 4

Come si vede, il ceppo è altrettanto, se non più, ricercato dalle larve per l'incrisalidamento, quanto le punte delle canne.

Tanto nel caso dell'applicazione delle fasce quanto in quello dello spuntamento delle canne, la lotta può completarsi col mettere in libertà gli imenotteri

parassiti, che escono dalle crisalidi, tenendo le fascie e le punte delle canne in apposite cassette, donde possano uscire gli imenotteri e non le farfalle. Le seguenti cifre dànno un'idea della importanza degli imenotteri parassiti, e di altre cause parassitarie, nella lotta contro le tignuole. Da 100 bozzoletti si sono ottenuti (Monticelli) 57 farfalle e 22 imenotteri parassiti; le altre crisalidi erano parassitizzate da funghi ed alcuni bozzoletti eran vuoti. All'aperto, prima della schiusura, sicuramente ancora un certo numero di crisalidi sarebbe stato distrutto da predatori, da funghi e da altre cause nemiche.

Nelle punte di canna si trovano frequentissimamente: un tenebrionide, del genere *Helops*, e le larve di un malachide, il *Malachius bipustulatus*, che sono considerati come predatori delle crisalidi. Ma sulla loro utilità e voracità è lecito di aver forti dubbî. Abbiamo infatti trovato spesse volte gli *Helops* e le larve di *Malachius* in compagnia di crisalidi sane ed intatte; e, tenuti gli uni e le altre in capsula di vetro insieme con crisalidi, sono morti senza danneggiarne alcuna.

***

Anche nella località presa in esame si nota una grande predominanza di *Eudemis* sulla *Conchylis*. Delle 57 farfalline ottenute (Monticelli) da 100 bozzoletti, di cui abbiamo già detto, ben 54 erano di *Eudemis* e solo 3 di *Conchylis*.

Nelle catture con l'acqua melassata, di cui si parlerà in un'altra Nota, abbiamo ottenuto una percentuale di *Conchylis* sensibilmente superiore, e cioè 10 *Conchylis* e 73 *Eudemis*. Può darsi che la *Conchylis* si trovi in abbondanza in certi punti ristretti del territorio: ricordiamo di aver veduto, in alcune sere di estate, svolazzare, in certe località, esclusivamente delle *Conchylis* in numero considerevole.

Batteriologia. — *L'influenza della temperatura sulla microflora del fieno. Fieni lattici e fieni butirrici* [1]. Nota del prof. Costantino Gorini, presentata dal Socio G. Briosi.

In una serie di lavori pubblicati nell'*Annuario dell' Istituzione Agraria Ponti* [2], edito dalla R. Scuola superiore di agricoltura di Milano, io ho comunicato le ricerche batteriologiche sui foraggi infossati, che perseguo dal 1904. In esse ho preso a studiare, da un punto di vista nuovo, i pro-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di batteriologia della R. Scuola superiore di agricoltura di Milano. Pervenuto all'Accademia il 6 giugno 1914.

[2] Gorini, *Ricerche batteriologiche sui foraggi conservati nei silò*. Annuario dell'Istit. agraria dott. Andrea Ponti, volumi V, VI, VII, VIII, IX, X e XI, anni 1904-1914. Milano, Tipografia Agraria.

cessi fermentativi che si svolgono nei silò in base al comportamento della loro microflora nel latte; per cui sono arrivato a distinguere due tipi principali di silò, a seconda della direzione fermentativa in essi predominante: i silò lattici e i silò butirrici, distinzione che andrebbe a sostituire la vieta classificazione in silò dolci e silò acidi. Ho messo in luce l'influenza che la temperatura esercita su detti processi fermentativi e, quindi, sulla riuscita dei silò: i silò lattici, nei quali cioè prevale una microflora lattica, si ottengono quando la temperatura non supera i 50° C.; i silò butirrici, nei quali predomina una microflora butirrica, si hanno a temperature attorno ai 60° C.

Ho dimostrato che il massimo numero dei comuni silò è di natura piuttosto butirrica; ho posto in chiaro i pericoli che i silò butirrici presentano sia per le funzioni intestinali degli animali, sia per la sanità del latte, sia per la fabbricazione dei prodotti caseari e segnatamente dei formaggi. In forza di ciò, e considerando i vantaggi zootecnici e caseari che offrono per contro i silò lattici, ho per il primo (1907) proposto e studiato la preparazione di silò lattici mediante l'aggiunta di fermenti selezionati e la limitazione della temperatura di caricamento. Le prove, fatte con metodo rigorosamente comparativo, hanno dato risultati conformi alla aspettativa; essi parlano decisamente in favore del nuovo metodo di insilamento, il quale si è rivelato altresì in grado di spiegare una benefica influenza sulla conservazione dei foraggi infossati, diminuendo la perdita di sostanze nutritive azotate e zuccherine che sempre si verifica durante il processo fermentativo.

La temperatura di caricamento dei silò può e deve variare a seconda dei tipi di fermenti selezionati che si adoperano; vi sono fermenti lattici che funzionano ad alta temperatura (persino attorno ai 50° C.) come ve ne sono di quelli che funzionano a temperatura bassa (persino attorno ai 20° C.); allo scopo di eliminare una buona parte della microflora antagonista, parmi preferibile di usare fermenti lattici che permettono di raggiungere temperature un po' elevate capaci di uccidere i germi meno termoresistenti; naturalmente però la necessità di raggiungere alti gradi di calore è tanto meno sentita quanto più abbondante è la presenza dei fermenti lattici, perchè questi col loro rapido sviluppo finiscono col creare presto un ambiente sfavorevole ai fermenti antagonisti; io ho ottenuto buoni risultati anche contenendo la temperatura a 30-35° C. (Vedi la mia Relazione settima per l'anno 1912-913, nell'*Annuario Ponti*, vol. XI, 1914). Ciò deve però dipendere anche dalla natura dei foraggi infossati e dalla rispettiva microflora naturale.

***

In un altro lavoro più recente (1), avendo esteso le mie indagini alla microflora dei foraggi non insilati (erbe, fieni, surrogati, ecc.), ho dimostrato

(1) Gorini, *L'alimentazione delle vaccine e la produzione igienica del latte*. (Per

in linea generale la influenza perniciosa che essa può esercitare sia sulla salute del bestiame, sia sul latte e sui prodotti caseari, qualora detti foraggi abbiano subìto macerazioni o fermentazioni anormali; ed ho avanzato la proposta di sottomettere i foraggi, almeno nei casi dubbî o sospetti, ad un controllo batteriologico-zimoscopico sul genere di quello da me escogitato per i silò; imperocchè, a mia veduta e per mia esperienza, non basta l'esame microscopico semplice, come oggi si suole eseguire, per giudicare della salubrità di un foraggio: ci sono erbe, fieni, crusche, panelli dichiarati sani all'esame microscopico, che mi risultarono invece pericolosi al controllo batterioscopico (1).

* * *

Ultimamente poi ho condotto a termine, sempre col medesimo indirizzo, alcune ricerche particolari sulla fienagione, circa le quali reputo opportuno di riferire brevemente in questa Nota preliminare. In base a queste ricerche, parmi convenga stabilire anche qui, come nei silò, una prima distinzione dei fieni in fieni normali e fieni anormali; chiamando normali quei fieni che non abbiano subìto macerazioni o fermentazioni anormali, che non siano ammuffiti, guasti o abbruciati (cosidetti *fieni scaldati*), ho trovato che essi sono alla lor volta suscettibili di una suddistinzione, a seconda della batterioflora predominante, in fieni a prevalente fermentazione lattica e fieni a prevalente fermentazione butirrica; onde si può parlare anche qui di fieni normali lattici e di fieni normali butirrici.

Ho trovato inoltre anche qui, come nei silò, che nella maggior parte dei fieni comuni predomina la flora butirrica; e che su ciò ha una notevole importanza la temperatura di fermentazione. I fieni che hanno raggiunto temperature non troppo elevate (attorno ai 50° C.) mi sono risultati più ricchi di fermenti lattici che non quelli che hanno raggiunto temperature più alte (attorno ai 60°); siccome, peraltro, ciò deve variare anche a seconda della qualità delle erbe affienate e della rispettiva microflora naturale, ho pensato di eliminare queste cause di divario istituendo il seguente esperimento:

Ho preso una stessa e medesima bica di fieno, e l'ho sottoposta al controllo zimoscopico-batteriologico nelle sue diverse fasi di fermentazione; orbene

---

un controllo batteriologico dei foraggi). Rend. R. Ist. Lomb. sc. e lett, 26 marzo 1914, vol. XLVII, 1914, pag. 288.

(1) Dopo la pubblicazione del suddetto mio lavoro è apparso nel « Centralblatt für Bakteriologie » ecc. (Abteilung II°, 41° vol., 27 maggio 1914, pag. 1) un accurato studio di A. Wigger del Laboratorio di Batteriologia Agraria del Politecnico di Zurigo (diretto dal Prof. Düggeli) sulla microflora di alcuni foraggi allo stato fresco e fermentato con speciale riguardo alla sua influenza sul latte. Esso viene a corroborare non solamente le mie ricerche, ma anche la mia proposta di un controllo batteriologico dei foraggi, data l'insufficienza del controllo chimico e microscopico semplice.

ho constatato che entro i primi tre, quattro giorni di fermentazione, con una temperatura attorno ai 50-55° C., essa poteva dirsi costituita da fieno prevalentemente lattico; in seguito, invece, tendeva a diventare sempre più butirrica, man mano che la temperatura saliva a 60-65° C. ed oltre, qual' è purtroppo frequente ad essere raggiunta nella fienagione ordinaria.

Pur riservandomi di ritornare diffusamente sull'argomento, i risultati di queste mie ricerche sui fieni si accordano siffattamente con quelli delle mie precedenti sui silò, che non esito fin da ora a consigliare anche qui una conveniente limitazione della temperatura di fermentazione, a fine di promuovere una salutare produzione di fieni a microflora prevalentemente lattica.

A tale intento gioverà aver cura di accumulare il fieno a dovere, stendendolo per strati, rassettandolo e comprimendolo in guisa da espellerne la maggior quantità di aria; verranno così ostacolate le fermentazioni che provocano l' eccessivo riscaldamento con conseguente perdita di sostanze nutritive e distruzione della microflora benefica, mentre rimane in vita la microflora pericolosa.

Importa poi che gli agricoltori interroghino un po' più di frequente il termometro, il cui uso emerge dal sopradetto assolutamente necessario per regolare i processi fermentativi così nella fienagione come nell' infossamento dei foraggi.

Con esso noi possiamo non solamente prevenire il cosidetto surriscaldamento che conduce a fieni come a silò anormali (*fieni scaldati* o abbruciati), ma possiamo altresì contenere la temperatura dei fieni come dei silò *normali* entro limiti tali da favorire il predominio della flora più benefica e delle fermentazioni più conservative.

Si avranno così fieni igienici e più nutritivi, con vantaggio evidente per il bestiame, per il latte e per i prodotti caseari.

Riassunto. — Le mie ricerche batteriologiche sui fieni si possono riepilogare come segue:

1°. — Esse confermano le mie precedenti ricerche sui silò. Risulta infatti da esse:

a) che prescindendo dai fieni mal riusciti o anormali (ammuffiti, guasti, surriscaldati ecc.), i fieni ben riusciti o normali possono essere suddistinti come i silò normali in due gruppi: fieni lattici e butirrici, a seconda della microflora in essi dominante;

b) che questa microflora sta anche qui in stretto rapporto colla temperatura di fermentazione; attorno ai 50° C. prevalgono i fermenti lattici, attorno ai 60° C. prevalgono i fermenti butirrici;

c) che la maggior parte dei fieni comuni, come dei silò comuni, è di natura butirrica; e quindi poco propizia sia per le funzioni intestinali del bestiame sia per la sanità del latte e dei derivati;

d) che per ottenere fieni lattici è raccomandabile innanzitutto un ac-

curato caricamento dei fieni in guisa di espellerne la maggior quantità di aria e di poterne moderare la temperatura di fermentazione attorno ai 50° C.

2°. — Esse vengono a rinsaldare l'importanza della mia proposta di sottoporre i foraggi ad un controllo zimoscopico-batteriologico per giudicarne la salubrità e l'attitudine casearia. Risulta infatti dalle mie ricerche che si danno fieni normali, cioè nè ammuffiti, nè guasti, nè surriscaldati, i quali sia all'esame organo-lettico sia all'analisi chimica e microscopica semplice possono essere dichiarati sani, mentre contengono una microflora pericolosa tanto per le funzioni intestinali e le conseguenti malattie del bestiame quanto per le qualità del latte e per la riuscita dei prodotti caseari.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della morte dei Soci stranieri: Ludimar Hermann, mancato ai vivi il 5 giugno 1914; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Fisiologia*, sino dal 31 agosto 1910. — Adolfo Lieben, morto il 6 giugno 1914; faceva parte il defunto dell'Accademia, sino dal 21 agosto 1905, per la *Chimica*. — Ugo Kronecker, mancato ai vivi il 6 giugno 1914; apparteneva il defunto Socio all'Accademia, per la *Fisiologia*, sin dal 23 agosto 1897.